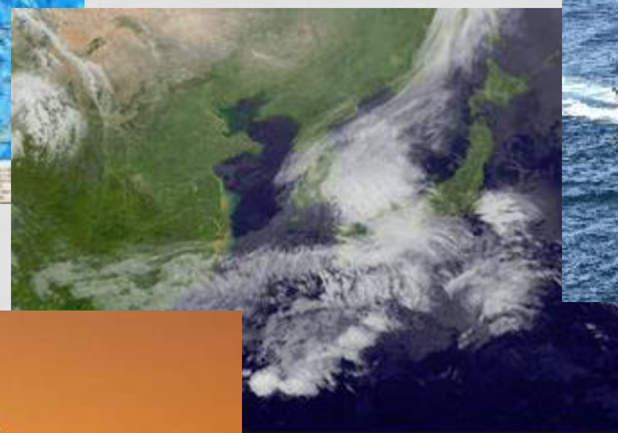
О РАССЛОЕНИИ ТЕРМО-СИЛОВЫХ ПОЛЕЙ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ КОНВЕКТИВНЫХ ДВИЖЕНИЙ В СЛОИСТЫХ КРУПНОМАСШТАБНЫХ ТЕЧЕНИЯХ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

К.Т.Н. **БУРМАШЕВА Н.В.**

Актуальность идеи



Система уравнений тепловой конвекции в приближении Буссинеска состоит из:

- уравнения Навье-Стокса

$$(\boldsymbol{V} \cdot \nabla)\boldsymbol{V} = -\nabla P + \nu \Delta \boldsymbol{V} + g\beta T \boldsymbol{k}, \qquad (1)$$

- уравнения теплопроводности

$$\boldsymbol{V} \cdot \nabla T = \chi \Delta T, \qquad (2)$$

- уравнения несжимаемости

$$\nabla \cdot \boldsymbol{V} = 0. \qquad (3)$$

Класс точных решений:

$$V_x = u(z); \quad V_y = \ v(z); \qquad (4)$$

$$T = T_0(z) + T_1(z)x + T_2(z)y; \quad P = P_0(z) + P_1(z)x + P_2(z)y. \qquad (5)$$

Подстановка (4)-(5) приводит систему (1)-(3) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} = 0; \tag{6}$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial z} = g\beta T_1; \quad \frac{\partial P_2}{\partial z} = g\beta T_2; \tag{7}$$

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = P_1; \quad \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = P_2; \tag{8}$$

$$\chi \frac{\partial^2 T_0}{\partial z^2} = uT_1 + vT_2; \tag{9}$$

$$\frac{\partial P_0}{\partial z} = g\beta T_0. \tag{10}$$

Краевые условия:

$$u(0) = v(0) = 0;$$

$$T_0(0) = 0; \; T_1(0) = A; \; T_2(0) = B;$$

$$T_0(0) = \theta; \; T_1(0) = C; \; T_2(0) = D;$$

$$P_0(h) = S; \; P_1(h) = 0; \; P_2(h) = 0;$$

$$\eta \frac{\partial u}{\partial z}(h) = \xi_1; \; \eta \frac{\partial v}{\partial z}(h) = \xi_2.$$

Рассмотрим частный случай $\underline{\boldsymbol{C = D = 0}}$.
Будем вести отсчет приведенного давления от уровня, задаваемого на верхней границе слоя (положим б/о $S = 0$).

Решение системы (6)-(10):

$$P_0(z) = \frac{1}{20160\chi\eta h^2\nu}\{168h\nu[60\chi\eta\beta g\theta(z^2 - h^2) + \beta g(A\xi_1 + B\xi_2)(2h^5 - 5h^3z^2 + 5hz^4 - 2z^5)] + AB\eta\beta g(35h^8 - 80h^6z^2 + 168h^3z^5 - 196h^2z^6 + 88hz^7 - 15z^8)\};$$

$$P_1(z) = -\frac{A\beta g(h - z)^2}{2h};$$

$$P_2(z) = -\frac{B\beta g(h - z)^2}{2h};$$

$$T_0(z) = -\frac{z}{2520\chi\eta h^2\nu}\{210h\nu[-12\chi\eta\theta + (A\xi_1 + B\xi_2)(h^3 - 2hz^2 + z^3)] + AB\eta\beta g(20h^6 - 105h^3z^3 + 147h^2z^4 - 77hz^5 + 15z^6)\};$$

$$T_1(z) = A - \frac{Az}{h};$$

$$T_2(z) = B - \frac{Bz}{h}.$$

Нормируем решение:

Пусть (без ограничения общности) $A \neq 0$.
Введем новые параметры системы: $1 = \frac{A}{A}$; $\Delta^* = \frac{B}{A}$; $\delta = \frac{h}{l}$, где h, l – соответственно вертикальный и горизонтальный характерные размеры слоя.
Перейдем к безразмерным координатам $\overline{x} = \frac{x}{l}$; $\overline{y} = \frac{y}{l}$; $\overline{z} = \frac{z}{h}$, изменяющимся в диапазоне $[0,1]$.

Функцию температуры нормируем на Al:

$$\overline{T} = \frac{T}{Al} = \frac{T_0}{Al} + \frac{T_1}{Al} \cdot \frac{x}{l} l + \frac{T_2}{Al} \cdot \frac{y}{l} l = \overline{T}_0 + \overline{T}_1 \overline{x} + \overline{T}_2 \overline{y}.$$

Аналогично обезразмериваем давление, разделив все члены на $g\beta Al^2$:

$$\overline{P} = \frac{P}{g\beta Al^2} = \frac{P_0}{g\beta Al^2} + \frac{P_1}{g\beta Al} \cdot \frac{x}{l} + \frac{P_2}{g\beta Al} \cdot \frac{y}{l} = \overline{P}_0 + \overline{P}_1 \overline{x} + \overline{P}_2 \overline{y}.$$

Эти функции описывают поверхности в четырехмерном пространстве координат.
Снизим размерность, введя замену $t = x + \Delta^* y \in [0, 1 + \Delta^*]$. Можно показать, что точка (x_*, y_*, z_*) является экстремумом функции $T(z)$ (или $P(z)$) тогда и только тогда, когда экстремумом этой функции является точка (t_*, z_*), где $t = x_* + \Delta^* y_*$.

Функции $T(z)$ и $P(z)$ описывают поверхности в четырехмерном пространстве координат.
Снизим размерность, введя замену $t = x + \Delta^* y \in [0,1 + \Delta^*]$.
Можно показать, что точка (x_*, y_*, z_*) является экстремумом функции $T(z)$ (или $P(z)$) тогда и только тогда, когда экстремумом этой функции является точка (t_*, z_*), где $t = x_* + \Delta^* y_*$.

Достаточное условие существования экстремума у функции $f(t, z)$ двух переменных заключается в определении знака выражения

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial z}\right)^2$$

в точке, подозрительной на экстремум.

В случае функции температуры имеем:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2 T}{\partial t \partial z}\right)^2 = 0 \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2 T}{\partial t \partial z}\right)^2 = -\left(\frac{\partial^2 T}{\partial t \partial z}\right)^2 = -1 < 0,$$

т. е., экстремума у функции T нет. Аналогично доказывается, что экстремума нет и у функции давления P.

Введем функцию $f(z)$ следующим образом:

$$T_0 = z \cdot \left(-\frac{\delta \cdot Pe}{2520}\right) \cdot f(z),$$

где $f(z) = 15z^6 - 77z^5 + 147z^4 + (a - 105)z^3 - 2az^2 + b,\ a = \frac{2520\alpha}{\delta \cdot Pe};\ b = 20 + \frac{2520(\alpha-\gamma)}{\delta \cdot Pe}$.

Величины $\gamma = \frac{\theta}{Al};\ \ \alpha = \frac{(\xi_1 + \Delta^* \xi_2)}{12\chi\eta} h^2 \delta$ являются безразмерными, $Pe = Pr \cdot Gr = \frac{\nu}{\chi} \cdot \frac{Bh \cdot g\beta h^3}{\nu^2}$ – число Пекле.

Согласно теореме Декарта, число положительных корней многочлена с вещественными коэффициентами равно количеству перемен знаков в ряду его коэффициентов или на четное число меньше этого количества.

В таблице приведено возможное количество смен знаков ряда коэффициентов функции $f(z)$ в зависимости от значений параметров a, b.

№ п.п.	$a - 105$	a	b	Число смен знаков
1	$a - 105 < 0$	$a > 0$	$b \geq 0$	4
2			$b < 0$	5
3		$a \leq 0$	$b > 0$	4
4			$b \leq 0$	3
5	$a - 105 \geq 0$	$a \geq 0$	$b \geq 0$	2
6			$b < 0$	3
7		$a < 0$ – не реализуем		-

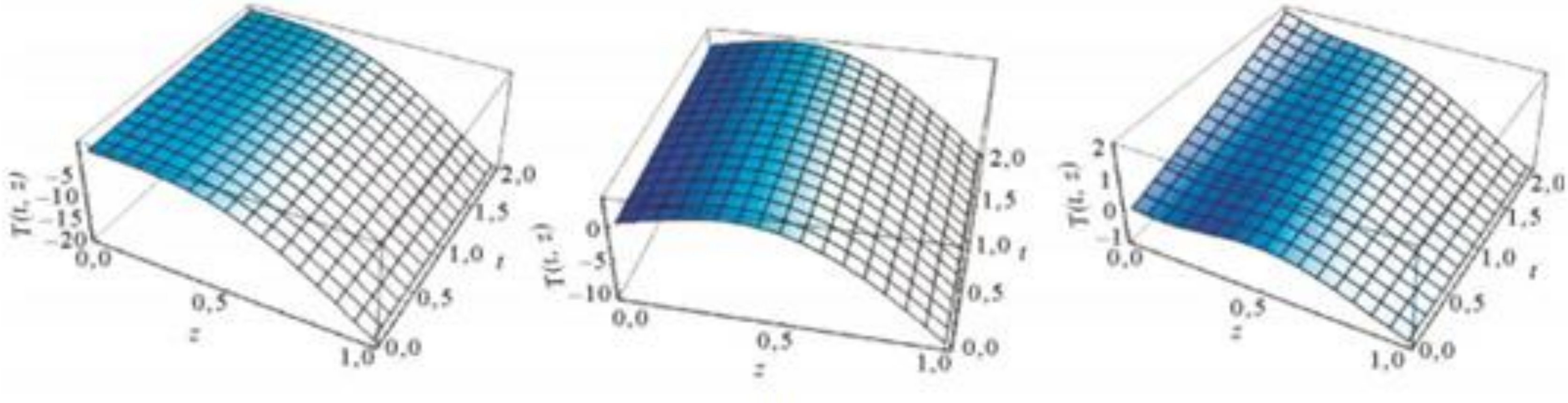
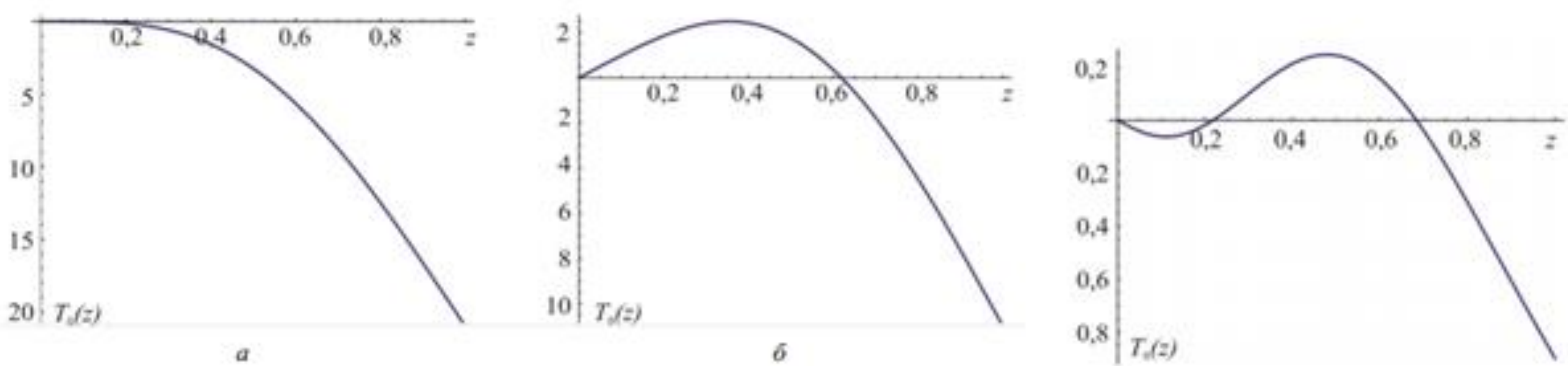


Рис. 1. Поведение функции $T(t,z)$ в зависимости от значений параметров системы:

$$а - \text{при } \frac{(A\xi_1+B\xi_2)h^3}{12A\chi\eta l} = -1;\ \frac{\theta}{Al} = -19;\ б - \text{при } \frac{(A\xi_1+B\xi_2)h^3}{12A\chi\eta l} = -1;\ \frac{\theta}{Al} = -9;$$

$$в - \text{при } \frac{(A\xi_1+B\xi_2)h^3}{12A\chi\eta l} = -20;\ \frac{\theta}{Al} = -1$$



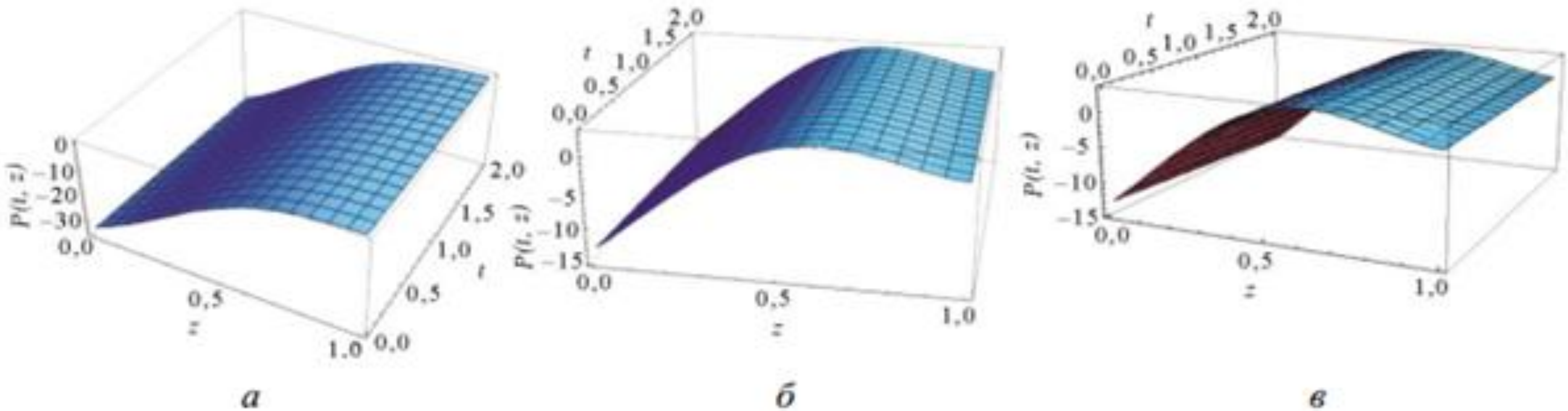
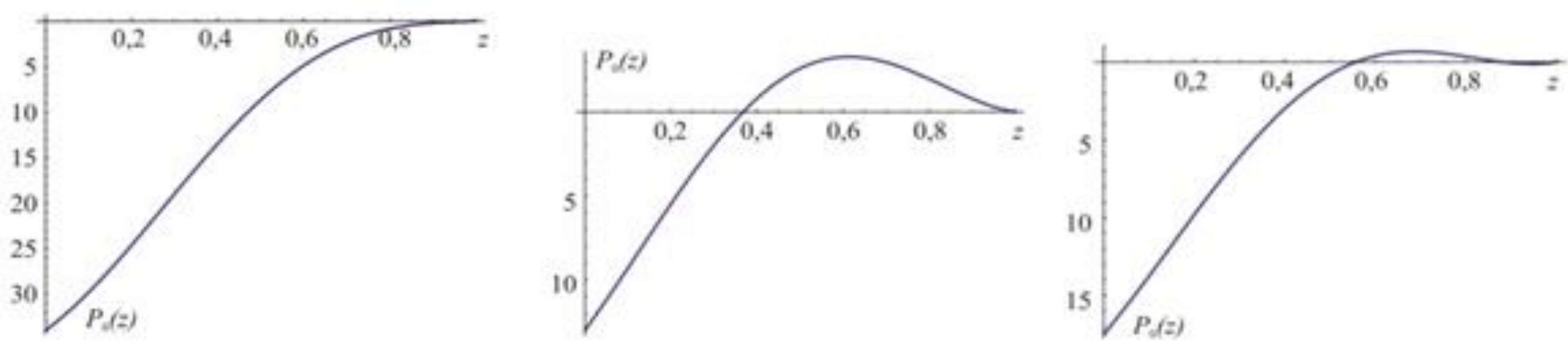


Рис. 2. Поведение функции $P(t,z)$ в зависимости от значений параметров системы:

$а$ – при $\frac{(A\xi_1+B\xi_2)h^5}{120A\chi\eta l^3}=1$; $\frac{\theta}{2Al^2}=1$; $б$ – при $\frac{(A\xi_1+B\xi_2)h^5}{120A\chi\eta l^3}=10$; $\frac{\theta}{2Al^2}=-2$;

$в$ – при $\frac{(A\xi_1+B\xi_2)h^5}{120A\chi\eta l^3}=10$; $\frac{\theta}{2Al^2}=2{,}5$



СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!