На правах рукописи

БУРМАШЕВА НАТАЛЬЯ ВЛАДИМИРОВНА

АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ И ПРЕДЕЛЬНЫХ НАГРУЗОК СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ С ЭЛЕМЕНТОМ ИЗ РАЗУПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ МАТЕРИАЛА ПРИ ТРЕХОСНОМ РАСТЯЖЕНИИ

Специальность 01.02.04 — Механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Екатеринбург — 2013

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте машиноведения Уральского отделения Российской академии наук

Научный руководитель:	Стружанов Валерий Владимирович доктор физико–математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	Залазинский Александр Георгиевич доктор технических наук, профессор, ФГБУН Институт машиноведения Уральского отделения Российской академии наук, заведующий лабораторией
	Радченко Владимир Павлович доктор физико–математических наук, профессор, ФГБОУ ВПО "Самарский государственный технический университет", заведующий кафедрой прикладной математики и информатики
Ведущая организация:	ФГАОУ ВПО "Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина "

Защита диссертации состоится 10 декабря 2013 года в 15 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 004.023.01 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте машиноведения Уральского отделения РАН по адресу: 620049, г. Екатеринбург, ул. Комсомольская, 34.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института машиноведения Уральского отделения Российской академии наук.

Автореферат разослан “___” ноября 2013 года.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор технических наук, профессор Коновалов А.В.

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследований. Постоянное ужесточение требований, предъявляемых к качеству элементов конструкций, предполагает внедрение в практику проектирования всё более совершенных методов расчёта их прочности, долговечности, надёжности и живучести. Создание новых методов базируется на введении в рассмотрение свойств материалов, не учитываемых в традиционных теориях механики деформируемого твёрдого тела, например, свойства материалов, проявляющиеся в наличии ниспадающих участков на диаграмме деформирования — стадии разупрочнения.

Необходимость исследования закритического поведения систем обосновывается тем, что знание свойств тел на закритической стадии деформирования позволяет полнее использовать имеющиеся прочностные резервы, что приводит в итоге к повышению безопасности механических систем, включающих тела, для которых осуществимо закритическое деформирование. При этом стадия разупрочнения характеризуется накоплением в материале микротрещин и возникновением магистральной трещины, которая в результате является основной причиной снижения нагрузки.

В экспериментальных и теоретических работах российских и зарубежных ученых, среди которых С.Д. Волков, И.С. Воронюк, В.А. Ибрагимов. Ю.В. Кадашевич, Д.В. Клюшников, В.В. Новожилов, А.А. Лебедев, Н.Г. Чаусов, Л.В. Никитин, Е.И. Рыжак, В.В. Стружанов, В.П. Радченко, В.Э. Вильдеман, Z.P. Bazant. J.Bobinski, M. Brocca, D.C. Drucker, R.H. Evans, E. Smith, R.Y. Xiao и других была установлена принципиальная возможность экспериментального построения диаграммы деформирования с падающей до нуля ветвью, и установлен, по крайней мере, на качественном уровне эффект от включения в рассмотрение закритической стадии деформирования (разупрочнения), заключающийся в уточнении значения предельной несущей способности и напряженно-деформируемого состояния, предшествующего разрушению.

Закритическое деформирование заведомо неустойчиво, но неустойчивые состояния материала могут быть реализованы, если этот материал находится в составе устойчивой механической системы. Осуществимость неустойчивых состояний существенно связана с неодномерностью тел и не имеет одномерных аналогов.

Использование закритических характеристик связано не только с трудностями экспериментального характера, но и с математическими проблемами, не характерными для традиционной механики деформируемого твердого тела. Это в основном неединственность и неустойчивость решений нелинейных уравнений равновесия. Такие задачи не удовлетворяют условиям корректности Адамара. Поэтому постулат Друккера, выполнение которого гарантирует корректность задач, являлся, да и является, условием для отбраковки моделей. Однако, как показано в некоторых работах Стружанова В.В., Вильдемана В.Э. и др., невыполнение постулата Друккера не препятствует решению отдельных задач механики. Кроме того, показано, что учет разупрочнения может позволить расчитывать предельную нагрузку, близкую к реальности. Дальнейшее распространине выдвинутых предположений требует решения конкретных неодномерных задач, на которых возможно было бы выяснить все особенности теории разупрочняющегося тела. Такие примеры наглядно бы демонстрировали постановки задач, подходы и методы их решения и позволяли бы исследовать эффекты, скрытые при общем рассмотрении. Кроме того, построенные методы и алгоритмы уже на данном этапе исследования проблем разупрочнения материала в элементах конструкций могут быть включены в практику проектирования отдельных конструкций.

Целью данной диссертационной работы является разработка методов анализа напряженного состояния и расчета предельных нагрузок градиентной дискретной механической системы, моделирующей деформационное поведение и разрушение при трехосном растяжении в упругой среде элемента из разупрочняющегося материала (элементы толстостенных труб и сферических сосудов большого диаметра при внутреннем давлении), и общих принципов позволяющих уже на данной стадии внедрять в практику проектирования эти методики для решения аналогичных задач, возникающих при проектировании конструкций.

Для достижения указанной цели были поставлены следующие **задачи**:

1. Описать упрочнение и разупрочнение материала при его трехосном деформировании единым выпукло-вогнутым потенциалом, позволяющим на обеих стадиях записать связь между напряжениями и деформациями в виде конечных соотношений.

2. Развить эффективные численные методы расчета параметров всех положений равновесия, в том числе и неустойчивых, в применении к рассматриваемой мехнической системе.

3. Разработать методику, позволяющую находить предельные значения нагрузок, близкие к реальности, без решения систем нелинейных уравнений равновесия.

Научная новизна заключается в следующем:

1. Показана возможность построения выпукло-вогнутого потенциала, который с единых позиций описывает свойства материала при его упрочнении и разупрочнении в результате активного трехосного растяжения.

2. Установлено, что данный потенциал определяет конечную зависимость между деформациями при активном нагружении и напряжениями, которую можно трактовать как дифференцируемое отображение простран-

ства деформаций в пространство напряжений, обладающее особенностями. Эти особенности связаны с вырождением матрицы Якоби потенциала, причем точки вырожденности соответствуют пограничному состоянию материала (переход от упрочнения к разупрочнению).

3. Выписана потенциальная функция для всей механической системы, и установлено, что порождаемые ею уравнения равновесия имеют несколько решений. Приведена методика определения числа решений (положений равновесия) для заданной внешней нагрузки.

Теоретическая значимость исследований обоснована тем, что предложенные методы и подходы могут быть использованы для дальнейшего развития теоретических положений механики разупрочняющихся материалов и разработки эффективных методов расчета на прочность и живучесть различных конструкций, которые вследствие учета стадии разупрочнения позволят полностью использовать ресурс материала.

Практическая значимость работы.

Разработана численная процедура выбора необходимого числа начальных приближений для реализации итерационной схемы метода Ньютона–Канторовича к задаче об определении параметров всех равновесных состояний исследуемой механической системы.

Разработана методика расчета предельных нагрузок, позволяющая избежать решения систем нелинейных уравнений равновесия. Методика основана на использовании сепаратрисы потенциальной функции механической системы.

Изложенные результаты вносят необходимую ясность о целях и путях дальнейшего использования стадии разупрочнения при практических расчетах. Кроме того, рассмотренная механическая модель уже сейчас может быть применена для анализа разрушения в отдельных элементах ответственных систем, таких как трубы большого диаметра и сферические сосуды.

Результаты исследований внедрены в учебный процесс и составляют содержание некоторых разделов спецкурса "Устойчивость деформируемых тел из разупрочняющихся материалов"магистерской программы "Механика деформируемого твердого тела", направление 010800 — Механика и математическое моделирование в Институте математики и компьютерных наук Уральского федерального университета имени первого Президента России Б.Н.Ельцина.

Исследования, представленные в диссертационной работе, выполнялись при поддержке грантов РФФИ (проекты 10–08–00135, 10–01–96018-р_Урал_а, 13–08–00135) и молодежного научного проекта Президиума УрО РАН № 11–1–НП–539.

Методология и методы исследований. При проведении исследований использовался аппарат математической теории катастроф, теории особенностей дифференцируемых отображений, функционального анализа и механики деформируемого твердого тела. Методологическую основу диссертационной работы составляют труды научного руководителя, д.ф.-м.н., профессора В.В. Стружанова.

Положения, выносимые на защиту:

1. Методика построения единого выпукло-вогнутого потенциала, описывающего при активном трехосном растяжении материала его свойства как на стадии упрочнения, так и на стадии разупрочнения.

2. Метод определения числа решений нелинейных уравнений равновесия градиентной механической системы.

3. Применение метода Ньютона–Канторовича для вычисления неединственных решений. Процедура выбора необходимого числа начальных приближений для реализации итеррационной схемы Ньютона–Канторовича.

4. Численный метод построения сепаратрисы потенциальной функции механической системы и методика определения предельных значений нагрузок.

Достоверность и обоснованность научных результатов обеспечивается строгой математической постановкой задачи, использующей минимальное число допущений и корректным применением для ее решения современного математического аппарата и законов механики деформируемого твердого тела, а также проведением тестовых расчетов.

Установлено качественное совпадение результатов, полученных в работе, с результатами, представленными в публикациях других исследователей по растяжению стержневых систем с разупрочняющимися элементами и совместному растяжению с кручением круговых стержней из разупрочняющегося материала.

Апробация работы. Результаты, составившие основу диссертационной работы, обсуждались и докладывались на следующих семинарах и конференциях: 16-ая, 17-ая, 18-ая, 19-ая Всероссийская школа-конференция молодых учёных «Математическое моделирование в естественных науках» (г. Пермь, 2006-2009); XV,XVI Всероссийская зимняя школа по механике сплошных сред (г. Пермь, 2009, 2011); III, IV, V Российская научно-техническая конференция «Разрушение, контроль и диагностика материалов и конструкций» (г. Екатеринбург, 2007, 2009, 2011), четвёртая, пятая, шестая, седьмая Всероссийская конференция с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (г. Самара, 2007-2010), Всероссийская научно-техническая конференция «Проблемы безопасности критичных инфраструктур территорий и муниципальных образований» (г. Екатеринбург, 2007-2009); V Всероссийская конференция «Механика микронеоднородных материалов и разрушение» (г. Екатеринбург, 2008); 37th

International Summer School «Advanced Problems in Mechanics» (Russia, St. Petersburg (Repino), 2011); Международная конференция по математической теории управления и механике (г. Суздаль, 2011, 2013); Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (г. Суздаль, 2012); Всероссийская молодежная конференция "Современные проблемы механики"(Екатеринбург, 2010-2012).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 19 работ (не считая тезисов докладов), из них 5 статей в ведущих рецензируемых научных изданиях, входящих в перечень изданий, рекомендованных ВАК.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения, списка литературы, включающего 151 источник, и приложения. Работа содержит 23 рисунка и 4 таблицы. Общий объем диссертации составляет 115 страниц машинописного текста.

Содержание диссертации

Во введении обосновывается актуальность темы исследования и приводится общая характеристика работы, практическая и теоретическая значимость, формулируются цели диссертации, описываются результаты, выносимые на защиту.

В первой главе приводится обзор научных публикаций по исследованию тел, выполненных из материалов с эффектом разупрочнения. Рассмотрены аналитические и численные подходы к решению краевых задач деформирования таких тел на падающей ветви. Выполнен анализ основных направлений исследования разупрочняющихся тел в составе устойчивой системы. На основе анализа приведенных ссылок сформулированы цели и задачи диссертационного исследования.

Вторая глава посвящена описанию одной математической модели разупрочняющегося тела, взятой за основу для иллюстрации разрабатываемых в ходе исследований методов анализа напряженного состояния и определения предельных нагрузок.

Рассматривается стержневая механическая система, в которой кубический элемент 4, выполненный из материала, обладающего эффектом деформационного разупрочнения, подвергается трехосному растяжению в системе, в которой растягивающие усилия на куб передаются посредством трех линейно упругих стержней с жесткостями $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ соответственно (рисунок 1). В недеформированном состоянии длина ребер куба равна единице (отсчетная конфигурация). Грани куба с одной стороны скреплены шарнирами с абсолютно жесткими стенками, с другой стороны с упругими стержнями 1,2,3 таким образом, чтобы в процессе трехосного растяжения куб мог принимать только форму прямоугольного параллелепипеда.

Точкам свободных концов стержней 1,2,3 задаются монотонно возрастающие перемещения u_1, u_2, u_3 (жесткое нагружение), либо к ним приложены монотонно возрастающие усилия P_1, P_2, P_3 (мягкое нагружение). Нагружение системы происходит при постоянной температуре и столь медленно, что возможно пренебречь динамическими эффектами. В рассматриваемой модели возможны несколько видов нагружения системы, которые можно разделить на три типа: кинематическое нагружение посредством задания трех перемещений, силовое нагружение с помощью приложения трех сил, смешанное нагружение посредством одного перемещения и двух сил или с помощью двух перемещений и одной силы.

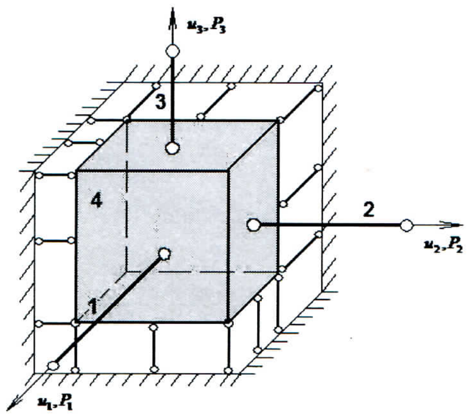

Рисунок 1 — Механическая система

В ходе нагружения системы грани куба не меняют ориентацию и в отсчетной конфигурации получают удлинения $\varepsilon_i (i = 1, 2, 3)$. По граням куба действуют равномерно распределенные усилия интенсивностью q_i. Равнодействующие этих усилий равны $\sigma_i = q_i S_{ia}$, где S_{ia} — площади граней в актуальной (текущей) конфигурации.

Величины σ_i можно рассматривать как номинальные напряжения, равные отношению величины силы, перпендикулярной к материальной площадке, к ее первоначальной площади. Величины ε_i можно трактовать как деформации, определяемые отношением удлинения отрезка к его первоначальной длине. Считаем, что деформации куба возрастают монотонно, то есть обеспечивается его активное деформирование.

Упорядоченные системы из трех вещественных чисел $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ можно рассматривать как элементы трехмерного евклидова пространства деформаций $\mathbb{R}^3_e$, а упорядоченные системы вещественных чисел $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ — как элементы евклидова пространства напряжений $\mathbb{R}^3_p$. Посредством некоторого отображения χ, заданного функциями

$$\sigma_i = \beta(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3), (i = 1, 3) \tag{1}$$

точкам кривой $\varkappa$ (путь деформирования) ставятся в соответствие точки в пространстве $\mathbb{R}^3_p$, образующие путь нагружения. Если в некоторой точке $N(\varepsilon_{1_N}, \varepsilon_{2_N}, \varepsilon_{3_N}) \in \mathbb{R}^3_e$ якобиан отображения (1) вырожден($detI = 0$), то согласно теореме о неявной функции решение уравнения $\chi(\mathbf{e}) = \mathbf{p}$ в окрестности δ_N этой точки не является единственным для $\mathbf{p} \in \chi(\delta_N)$, хотя отображение χ остается однозначным. Такие точки назовем особыми точками отображения χ.

Под активным нагружением будем понимать такой процесс, при котором элементарная работа δA напряжений положительна, а именно, $\delta A = \mathbf{p} \cdot \delta\mathbf{e} > \mathbf{0}$. Здесь $\mathbf{p}$ — вектор силы в момент начала догружения, а догружение осуществляется посредством задания вектора $\delta\mathbf{e}$. Когда при любом активном догружении полное приращение работы $\triangle A$ возрастает, то сопротивление материала увеличивается. Следовательно, материал находится в состоянии упрочнения. Полное приращение $\triangle A$ возрастает, когда $\delta\mathbf{p} \cdot \delta\mathbf{e} > \mathbf{0}$. Поэтому данное неравенство представляет собой условие общего упрочнения (упрочнения в целом). Если при любом активном нагружении выполняется неравенство $\delta\mathbf{p} \cdot \delta\mathbf{e} < \mathbf{0}$, то имеет место общее разупрочнение (разупрочнение в целом). Когда данное неравенство справедливо только для некоторых путей догружения, то будем говорить, что материал находится в состоянии частичного разупрочнения.

Векторное поле $\mathbf{p}$, образованное отображением χ, можно разложить на сумму векторов $\mathbf{p} = \mathbf{c} + \mathbf{r}$, где вектор $\mathbf{c}$ определяет потенциальное векторное поле (Π — скалярный потенциал векторного поля), а вектор $\mathbf{r}$ задает соленоидальное поле. Всюду далее будем полагать, что деформирование происходит в потенциальном поле с потенциалом $\Pi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, то есть отображение χ определяют формулы $\mathbf{p} = \operatorname{grad} \mathbf{\Pi}$.

Показано, что в случае деформирования в потенциальном поле со скалярным потенциалом работа напряжений в данном случае определяется потенциальной функцией Π. А элементарная работа напряжений равна $dA = d\mathbf{e}^T \cdot H(\Pi) \cdot d\mathbf{e}$, где $H(\Pi)$ есть матрица Гессе смешанных производных потенциала Π. Откуда следует, что если в изображаюшей точке, из которой происходит догружение, гессиан функции Π положительно определен, то функция Π строго выпукла вниз, что отвечает устойчивому характеру процесса деформирования (упрочнение). Когда при догружении в любом направлении гессиан отрицательно определен, то функция Π строго выпукла вверх, что отвечает общей неустойчивости процесса деформирования (общее разупрочнение). Если же гессиан знаконеопределен, то функция Π не выпуклая и не вогнутая, то есть имеет место седловая точка. При одних путях догружения, исходяших из заданной изображающей точки, тело упрочняется, при других — разупрочняется (частичное разупрочнение). Заметим, что состояние разупрочнение есть состояние собственной неустойчивости материала (физической неустойчивости), при которой непрерывность процесса деформирования возможна только при специальных условиях нагружения, подавляющих данную неустойчивость.

При одноосном деформировании полная диаграмма получается дифференцированием одномерной потенциальной функции, имеющей область выпуклости вниз, отвечающую устойчивости материала, точку перегиба, определяющую пограничное состояние и область выпуклости вверх (неустойчивость материала). Таким образом, можно с достаточной степенью точности считать, что при неодноосном деформировании с разупрочнением свойства материала должны описываться многомерной потенциальной функцией, имеющей область выпуклости вниз и, в общем случае, седловые точки (или области выпуклости вверх). А также точки, разделяющие состояния упрочнения и разупрочнения.

Если среда описывается непрерывно дифференцируемой функцией П, то в пространстве деформаций присутствует только одно силовое поле. В этом случае все поверхности уровня потенциала П подобны поверхностям уровня для упругого материала и имеют замкнутую форму. Переход материала в состояние пластичности, а также достижение предела прочности происходит тогда, когда удельная потенциальная энергия принимает некоторые заданные значения, не зависящие от вида пути деформирования. Каждому такому состоянию отвечает конкретная поверхность уровня, что согласуется с энергетической теорией прочности Бельтрами-Хэйга. Кроме того, существует предельная поверхность уровня, на которой потенциал имеет максимальное значение, равное работе разрушения, которая при одноосном растяжении равна площади, ограниченной полной диаграммой деформирования с падающей до нуля ветвью. На основании этих идей в работе приведена, не претендуя на общность, одна методика построения таких потенциальных функций, описывающих качественные характеристики разупрочняющегося материала.

Суть ее заключается в следующем: в условиях данной постановки задачи материал куба является частным случаем изотропной однородной среды Генки. Как известно, при изотермическом трехосном деформировании образца этих сред удельная потенциальная энергия деформаций $\Pi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ отождествляется со свободной энергией на всех стадиях деформирования материала, включая и закритическую стадию (разупрочнение). Из данного предположения вытекает, что работа напряжений не зависит от вида пути деформирования, а определяется положением начальной и конечной точек в пространстве деформаций.

Рассмотрим удельную потенциальную энергию упругих деформаций W_e куба как квадратичную форму. Матрицу, отвечающую этой форме, можно рассматривать как матрицу симметричного преобразования евклидова пространства деформаций, а значит, ее можно привести к диагональному виду путем ортогонального преобразования базиса. В новой системе координат эта матрица определяет поверхность второго порядка, являющуюся элипсоидом с известным соотношением главных осей. В силу сделанных предположений поверхности уровня единого потенциала П в области неупругости также будут элипсоидами с тем же отношением главных осей. Остается только найти распределение значений потенциала П по этим поверхностям уровня. Для этого на одной из осей новой системы координат берем произвольную точку и определяем элипсоид, но котором она лежит. Затем, учитывая, что путь, направленный по этой оси, реализуется при чистом сдвиге, по полной диаграмме сдвига найдем энергию деформаций. И, наконец, делая обратную замену координат, получаем искомый единый потенциал П.

Данный подход был реализован, в результате чего для исследуемого раузпрочняющегося элемента был получен следующий единый потенциал:

$$\Pi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = B\left\{1 - exp\left(-\frac{1}{4B}\left[\lambda(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)^2 + 2\mu(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2)\right]\right)\right\}.$$

Геометрически соответствующая данной записи поверхность есть трехмерная поверхность в четырехмерном пространстве. Качественный вид построенного потенциала при фиксированной одной переменной приведен на рисунке 2. Кроме того, матрица тангенциальных жесткостей, определяемая данным потенциалом, имеет шесть не равных нулю компонент, что указывает на приобретенную в ходе неупругого деформирования анизотропию материала.

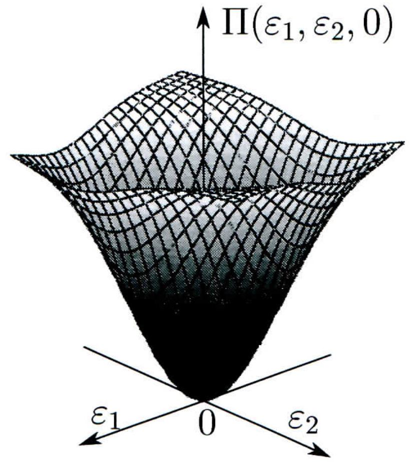

Рисунок 2 — Потенциал П при $\varepsilon_3 = 0$

Третья глава посвящена проблеме поиска методов, позволяющих найти все возможные решения уравнений равновесия. Ситуации, когда состояние некоторой системы (градиентной) определяются функцией типа потенциала $V(x_i, y_j)$, зависящей от конечного числа задаваемых параметров управления и параметров состояния, определяющих положение системы при заданных управлениях, являются очень распространенными. Если, кроме того, потенциальная функция является невыпуклой, то уравнения равновесия таких систем могут иметь неединственное решение. Существуют такие совокупности параметров управления, которым отвечает несколько равновесных состояний системы. Знание характеристик всех положений равновесия необходимо для анализа напряженного состояния исследуемой механической системы. Как правило, заранее неизвестно, существуют ли вообще решения, и если существуют, то сколько.

Систему уравнений равновесия здесь и далее рассматриваем как дифференцируемое отображение в общем случае обладающее особенностями, связанными с вырождением матрицы Якоби. В данной главе на основе свойств таких отображений изложена методика определения числа решений и их вычисления с помощью численной схемы Ньютона–Канторовича. Известно, что основной проблемой применения метода является выбор таких начальных приближений, начиная с которых метод сходится, причем число начальных приближений должно равняться числу решений. Для нахождения соответствующих начальных приближений используется представление уравнений равновесия как отображения пространства состояний в пространство управлений. Это однозначное отображение позволяет найти в пространстве управлений области, для точек которых уравнения равновесия имеют одинаковое число решений, и, кроме того, прообразы этих областей в пространстве состояний, в которых и следует искать начальные приближения для метода Ньютона–Канторовича. Разрабатываемый алгоритм численного определения характеристик всех равновесных состояний (в том числе и неустойчивых) проиллюстрируем на примере вычисления параметров равновесий стержневой механической системы, осуществляющей трехосное растяжение элементарного куба из нелинейного разупрочняющегося материала при жесткой схеме нагружения.

При активном деформировании исследуемая механическая система градиентна и ее поведение описывается потенциальной функцией

$$W = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \frac{(u_i - \varepsilon_i)^2}{2} + \Pi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3),$$

где первые три слагаемые — это энергия деформаций линейно упругих стержней 1,2,3, последнее слагаемое — выпукло-вогнутый потенциал, определяющий свойства куба. Параметры управления здесь u_i — перемещения свободных концов упругих стержней, параметры состояния ε_i — деформации куба.

Уравнения равновесия $W_{,\varepsilon_i} = 0$ определяют отображение f трехмерного евклидова пространства состояний X в трехмерное евклидово пространство управлений Y. Так как данное отображение имеет особенности, связанные с невыпуклостью потенциала Π, то в некоторых точках пространства состояний матрица Якоби данного отображения вырождена, причем якобиан с точностью до константы совпадает с гессианом $H(W)$ потенциальной функции системы. Точки, где матрица Якоби вырождена, образуют в пространстве деформаций многообразия критических точек отображения f, а их образы в пространстве управлений составляют многообразие критических хначений отображения. В этом случае отображение f относится к классу складывающихся отображений. На рисунке 3 показана качественная картина критических значений складывающегося отображения f.

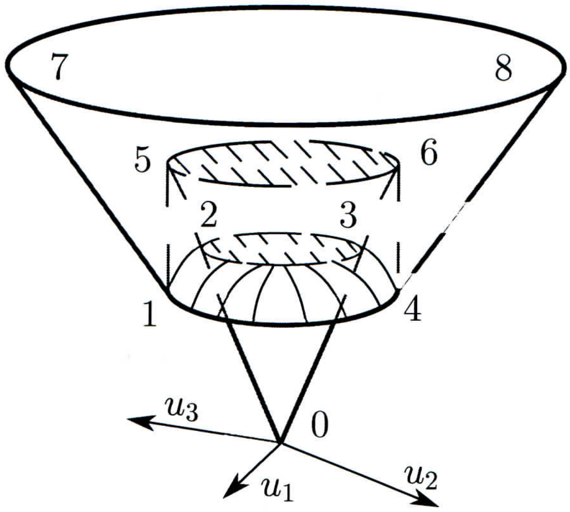

Рисунок 3 — Качественная картина

Многообразия критических точек отображения f разбивают пространство состояний на непересекающиеся открытые области, составляющие множество $\mathbf{\Psi} = \{\Psi^1, \Psi^2, \Psi^3\}$. Отображения этих областей в пространство управлений образуют множество $\mathbf{\Phi} = \{\Phi^1, \Phi^2, \Phi^3\}$. Так как отображение f имеет особенности, то области из $\mathbf{\Phi}$ пересекаются. Тогда каждый элемент $\Phi^s \in \mathbf{\Phi}$ есть объединение $\Phi^s = \bigcup\limits_k \Phi^s_k$, где Φ^s_k — пересечения k элементов из множества $\mathbf{\Phi}$. Теперь, если точка $\mathbf{y} \in Y = \mathbb{R}^3_y$ принадлежит некоторой области Φ^s_k, которая, естественно, имеет k прообразов в пространстве состояний, то для нее рассматриваемое векторное уравнение имеет ровно k решений.

Для нахождения всех решений уравнений равновесия для заданного $\mathbf{y}$ предлагается использовать метод Ньютона-Канторовича, согласно которому каждое последующее приближение к решению определяется формулой:

$$\mathbf{x}_{\alpha+1} = \mathbf{x}_\alpha - [f'(\mathbf{x}_\alpha)]^{-1} f(\mathbf{x}_\alpha) + [f'(\mathbf{x}_\alpha)]^{-1} \mathbf{y} \quad (\alpha = 0, 1, 2, ...). \tag{2}$$

Использование метода предполагает нахождение таких начальных приближений $\mathbf{x}_0 \in X$, начиная с которых итерации сходятся. Для выбора начальных приближений применяется следующая процедура. Возьмем точку $\mathbf{y} \in \phi_k^s$, для нее уравнения равновесия имеют k решений. Используя многообразие критических точек, находим области $\phi^m \subset \Phi(m = 1, ..., k)$ пересечение которых и образует область ϕ_k^s. Затем выделям их прообразы в пространстве R_x^3 (непересекающиеся области $\psi^m \subset \Psi$). Пусть среди них (без ограничения общности) оказалась область ψ^1. Построим в ней сетку узлов с достаточно малым шагом. Все узлы (точки $\mathbf{x}_{\gamma\beta} \in \psi^1$) отображаем в пространство R_y^3 и определяем $\min\limits_{\gamma,\beta}\rho\left(\mathbf{y}, f(\mathbf{x}_{\gamma\beta})\right)$, т.е. находим тот узел, отображение которого наиболее близко к точке $\mathbf{y}$ (ρ — евклидово расстояние между точками в пространстве R_y^3). Данный узел берем за начальное приближение $\mathbf{x}_0$ в схеме (2). Далее применяем один раз схему Ньютона-Канторовича. Получим значение $\mathbf{x}_1$. Если окажется, что $\rho\left(\mathbf{y}, f(\mathbf{x}_0)\right) > \rho\left(\mathbf{y}, f(\mathbf{x}_1)\right)$, то, продолжая итерации, находим искомое первое решение. Если данное неравенство не выполняется, то уменьшаем шаг сетки узлов и затем снова реализуем описанную процедуру. При поиске решений в остальных областях ψ^m поступаем аналогично.

Таким же образом был реализован алгоритм метода Ньютона–Канторовича и для параметров равновесия рассматриваемой механической системы в случае мягкого нагружения, когда

$$W_2 = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \frac{(u_i - \varepsilon_i)}{2} - \sum_{j=1}^{3} \int_0^{u_j} P_j de_j + \Pi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3),$$

где параметроы управления — внешние силы P_j, а параметры состояния — u_i, ε_i. Шесть уравнений равновесия сводятся к трем $\Pi_{,\varepsilon_i} - P_i = 0$, которые также определяют складывающееся отображение из пространства деформаций в пространство нагрузок.

Четвертая глава посвящена определению предельных нагрузок, при которых рассматриваемая механическая система разрушается. Разрушение трактуется как невозвожность равновесия, т.е. как потеря устойчивости процесса нагружения (Седов Л.И.). Известно (Постон Т., Стюарт И.), что согласно признаку промедления потеря устойчивости происходит тогда, когда путь нагружения в пространстве управлений выходит из области, ограниченной сепаратрисой потенциальной функции системы. Таким образом. для оценки предельной несущей способности необходимо знать сепаратрису.

Для построения сепаратрисы необходимо сначала найти все решения уравнений равновесия, определив тем самым критические точки потенциальной функции системы при возрастающих параметрах управления (нагрузках), а затем выделить из них вырожденные критические точки, в которых вырождается матрица Гессе потенциальной функции системы. Если компоненты матрицы Гессе зависят только от параметров состояния, то после подстановки вырожденных критических точек в уравнения равновесия находятся параметры управления, образующие сепаратрису.

В работе предложен другой подход построения сепаратрисы, позволяющий избежать решения систем нелинейных уравнений равновесия. Он основан на дискретизации пространства состояний сеткой узлов с достаточно малым шагом и вычислении детерминанта матрицы Гессе (матрицы вторых производных по параметрам состояния) потенциальной функции системы. Затем выделяются те узловые точки, в которых данный детерминант близок к нулю с заданной степенью точности. Полученные числовые определители вычисляются по схеме Гаусса. Отметим, что изложенная процедура без труда распараллеливается, так как для определенной совокупности узлов возможно выполнение данной операции на разных процессорах.

Таким образом, сначала выделяется множество точек в пространстве состояний, среди которых находятся и все близкие к вырожденным критическим точкам. Далее, применяя прямое отображение, заданное уравнениями равновесия, для каждой точки рассчитываются координаты точки в пространстве управлений, если отображение для конкретной точки имеет смысл, т.е. действительно происходит попадание в пространство управлений. Данная вычислительная схема также легко распараллеливается.

В результате всех этих операций получаем приближенный вид сепаратрисы. Наконец, определяя ту часть сепаратрисы, при пересечении которой осуществляется выход из области, ограниченной ветвями сепаратрисы, определяются предельные нагрузки на систему.

Данный алгоритм был реализован для расчета параметров предельных нагрузок рассматриваемой механической системы при жесткой и мягкой схемах нагружения, потенциальные функции которых приведены в третьей главе.

При расчетах брались следующие значения механических параметров системы: жесткости упругих стержней полагались равными $\lambda_i = 5000$ МПа·мм, модуль Юнга материала куба — $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона — $\nu = 0.3$. При указанных значениях параметров рассматриваемой системы были расчитаны предельные нагрузки. В таблице 1 представлены некоторые из полученных значений для случая жесткого нагружения, в таблице 2 — для случая мягкого нагружения.

Таблица 1 — Координаты некоторых точек, расположенных на сепаратрисе, при нагружении системы по жесткой схеме

u_1^s	0.314	0.361	0.310	0.289	0.242
u_2^s	0.357	0.202	0.266	0.198	0.227
u_3^s	0.180	0.260	0.339	0.386	0.400

Таблица 2 — Координаты некоторых точек, расположенных на сепаратрисе, при силовом нагружении системы

P_1^s	163.8	155.1	205.8	153.3	125.3
P_2^s	149.8	176	100.9	188.2	216.2
P_3^s	93.9	99.2	100.9	111.4	111.4

Заключение.

1. Предложена методика построения единого выпукло-вогнутого потенциала, описывающего его свойства при активном трехосном деформировании материала как на стадии упрочнения, так и на стадии разупрочнения.

2. Показано, что механическая система с разупрочняющимся элементом может иметь несколько положений равновесия при заданной внешней нагрузке. Создана методика, позволяющая определять число решений решений уравнений равновесия градиентной механической системы.

3. Разработан метод нахождения начальных приближений, соответствующих числу решений уравнений равновесия, для применения итерационной схемы Ньютона–Канторовича, что позволило использовать метод Ньютона–Канторовича для нахождения всех решений.

4. Предложен численный метод построения сепаратрисы потенциальной функции градиентной дискретной механической системы.

5. Приведена методика использования сепаратрисы для определения величин предельных нагрузок, при достижении которых система разрушается.

Разработанные методики могут быть положены в основу алгоритмов для программных комплексов, предназначенных для расчета несущей способности отдельных элементов конструкции, материал которых обладает эффектом разупрочнения.

Результаты, представленные в диссертации, могут служить начальным приближением нового подхода к анализу вопросов прочности различных конструкций, который в следствие учета стадии разупрочнения позволит полностью использовать ресурс материала.

Работы автора по теме диссертации

Статьи в журналах, входящих в список ВАК:

1. Стружанов, В.В. Об одном методе построения единого потенциала [Текст]/В.В. Стружанов, Е.Ю.Просвиряков, Н.В.Бурмашева // Вычислительная механика сплошных сред. —2009.— Т.2 № 2.— С. 96-107.

2. Стружанов, В.В. Устойчивость управления градиентными системами [Текст]/В.В. Стружанов, Н.В.Бурмашева // Вестник Тамбовского университета. —2011.— Т.16 № 4.— С. 1183-1184.

3. Стружанов, В.В. Вычислительная процедура нахождения предельных параметров нагружения механических систем [Текст]/В.В. Стружанов, Н.В.Бурмашева // Вычислительная механика сплошных сред. – —2011.— Т.4 № 4.— С. 107-113.

4. Стружанов, В.В. Метод Ньютона–Канторовича в задаче об определении неединственных решений уравнений равновесия дискретных градиентных механических систем [Текст]/В.В. Стружанов, Н.В.Бурмашева // Труды Института математики и механики. —2013.— Т.19 № 1.— С. 244-252.

5. Стружанов, В.В. Метод Ньютона–Канторовича в математической модели трехосного растяжения куба из материала с невыпуклым потенциалом [Текст]/В.В. Стружанов, Н.В.Бурмашева // Вестник Тамбовского университета. —2013.— Т.18 № 5-2.— С. 2694-2695.

Другие публикации:

1. Бурмашева, Н.В. Бифуркационные множества в задаче о трехосном растяжении элементарного куба [Текст]/Н.В. Бурмашева, В.В. Стружанов // Математическое моделирование и краевые задачи: Тр. четвертой Всеросс. конф. с междунар. участием. — Самара:СамГТУ. —2007.—ч.1.—с.54-56.

2. Стружанов, В.В. О свойствах кубического элемента при жестком трехосном деформировании [Текст]/В.В. Стружанов, Н.В. Бурмашева // Математическое моделирование и краевые задачи: Тр. пятой Всеросс. конф. с междунар. участием. — Самара:СамГТУ. —2008.—ч.1.—с.301-308.

3. Бурмашева, Н.В. Итерационный процесс расчета параметров равновесия при жестком нагружении системы, реализующей трехосное растяжение куба из упругопластического разупрочняющегося материала [Текст]/Н.В. Бурмашева, В.В. Стружанов// Математическое моделирование и краевые задачи: Тр. седьмой Всеросс. конф. с междунар. участием. — Самара:СамГТУ. —2010.—ч.1.—с.73-78.

4. Struzhanov, V.V. Newton-Kantorovich metho d of parametres' characterization of equilibrium of the system which realizes the triaxial strenght of the cube made from the nonlinear material with non-convex potencial [Текст]/V.V.Struzhanov, N.V.Burmasheva// Proceedings of the XXXIX Summer School-Conference «Advanced Problems in Mechanics». St.Petersburg (Repino). — St.Petersburg:IPME RAS. —2011.—p.468-476.

5. Бурмашева, Н.В. Метод Ньютона-Канторовича расчета неединственных равновесий механической системы, растягивающей куб из разупрочняющегося материала при задании сил и перемещений [Текст]/Н.В. Бурмашева, В.В. Стружанов// Труды Томского государственного университета. Серия физико-математическая. II Всероссийская молодежная научная конференция посвященная 50-летию физико-технического факультета Томского государственного университета «Актуальные проблемы современной механики сплошных сред и небесной механики». — Томск:Изд-во Томского университета. —2012.—с. 76-80.

6. Бурмашева, Н.В. Предельные значения нагрузок при силовом и кинематическом нагружении стержневой системы, реализующей трехосное растяжение куба из разупрочняющегося материала [Текст]/Н.В. Бурмашева, В.В. Стружанов// Математические методы и модели в теоретических и прикладных исследованиях: сб. научн. тр. [под научн. ред. Г.А. Тимофеевой, д-ра физ.-мат. наук и О.В. Куликовой, канд. пед. наук]. — Екатеринбург: Изд-во Ур-ГУПС. —2012.—вып. 4(187)—с. 22-32.

7. Стружанов, В.В. Об одной задаче управления в механике деформирования градиентных систем [Текст]/В.В. Стружанов, Н.В. Бурмашева // «Современные проблемы математики». Тезисы 42ой Всероссийской молодежной школы-конференции. — Екатеринбург:ИММ УрО РАН. —2011.—с.14-16.

8. Стружанов, В.В. Метод Ньютона-Канторовича при расчете устойчивых и неустойчивых равновесий градиентной системы, осуществляющей трехосное растяжение элементарного куба [Текст]/В.В. Стружанов, Н.В. Бурмашева // «Механика сплошных сред как основа современных технологий» (XVII Зимняя школа по механике сплошных сред). Тезисы докладов Всероссийской конференции. — Пермь: ИМСС УрО РАН. —2011.—с.301.

9. Бурмашева, Н.В. Вычисление параметров нагружения для одной стержневой градиентной механической системы [Текст]/Н.В. Бурмашева, В.В. Стружанов// IV Всероссийская научно-техническая конференция X IV школа молодых ученых семинар «Безопасность критических инфраструктур и территорий», материалы конференции и школы. — Екатеринбург: УрО РАН. —2011.—с. 104.

10. Стружанов, В.В. Деформирование нелинейных градиентных систем: устойчивость, неустойчивость, бифуркации [Текст]/В.В. Стружанов, Н.В.

Бурмашева // Тезисы докладов Международной конференции по математической теории управления и механике. — М.:МИАН. —2011.—с.192-193.

11. Бурмашева, Н.В. Численное построение сепаратрисы потенциальной функции механической системы, осуществляющей трехосное растяжение куба, и определение предельных значений параметров нагружения [Текст]/Н.В. Бурмашева// Тезисы докладов X Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики и Второй Всероссийской школы молодых ученых-механиков. — Н.Новгород:Изд-во Нижегородского госуниверситета. —2011.—с. 23-24.

12. Стружанов, В.В. Особенности отображения системы уравнений с вырожденной матрицей Якоби и применение метода Ньютона-Канторовича для определения всех ее решений [Текст]/В.В. Стружанов, Н.В. Бурмашева // Тезисы докладов Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. — М.:МИАН. —2012.—с.162-163.