

Исследование свободных колебаний вязкой жидкости в упругой трубке*

Елин В.В., Цветков Р.В., Шардаков И.Н., Шестаков А.П.
Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь

Введение

Явления свободных колебаний вязкой жидкости в упругих трубках могут присутствовать в широком многообразии технологических процессов и измерительных приборах. Очень часто эти явления происходят в поле силы тяжести. Именно эта ситуация имеет место в системах гидростатического нивелирования, которые используются для измерений наклонов и вертикальных перемещений в системах мониторинга конструкций и природных объектов. Этот метод измерения обладает рядом преимуществ: не требует обеспечения прямой видимости, обладает долговременной стабильностью, что важно для контроля объектов с большой базой, которая может достигать сотен метров.

Проблематика

В основе работы гидронивелиров лежит принцип сообщающихся сосудов. Эта система представляет разветвленную сеть протяженных, объединенных между собой трубок, заполненных вязкой жидкостью, находящейся в поле силы тяжести. Измерение вертикальных относительных перемещений осуществляется по изменению положения свободной поверхности жидкости в различных точках системы трубок. Важной технической характеристикой системы является частота свободных колебаний поверхностей жидкости и время затухания колебаний. Они определяют характерные времена изменений относительных перемещений, которые могут быть измерены системой гидронивелирования. В таких системах в качестве трубок удобно использовать гибкие упругие шланги. Способность трубки к упругому деформированию может оказаться фактором, влияющим на значения параметров свободных колебаний жидкости.

В общем случае движение вязкой жидкости в такой системе может быть описано уравнениями Навье-Стокса. Однако для рассматриваемых длинных трубок темерная реализация этого подхода может оказаться весьма затруднительной и нерациональной. Поэтому оценку динамических параметров свободных колебаний жидкости в поле силы тяжести производят на основе гидравлических моделей, при этом полагая, что стенки трубок являются абсолютно жесткими. Например в моделях наклономеров [1,2] и для длиннотных нивелиров [3] период колебаний (без учета диссипации) описывается формулой:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{2L \cdot S / 3g \cdot s} \quad (1)$$

где – S площадь сечения измерительного сосуда; s – площадь трубки; L– длина нивелира; g = 9.81 м/с².

Следует ожидать, что для трубок с «мягкими» жесткостными свойствами стенок будет наблюдаться зависимость параметров свободных колебаний от деформационного изменения внутреннего радиуса трубки. И, по всей видимости, эта зависимость будет увеличиваться по мере увеличения длины трубки.

Гидравлическая модель нивелира

Рассмотрим несжимаемую жидкость с плотностью ρ и вязкостью μ , которая находится в нивелире состоящем из двух измерительных сосудов и упругой соединительной трубки цилиндрической формы. Соединительную трубку разобьем на несколько сегментов сечением S_i и длиной L_i , в которых жидкость имеет скорость V_i а также давление P_i на границах сегментов.

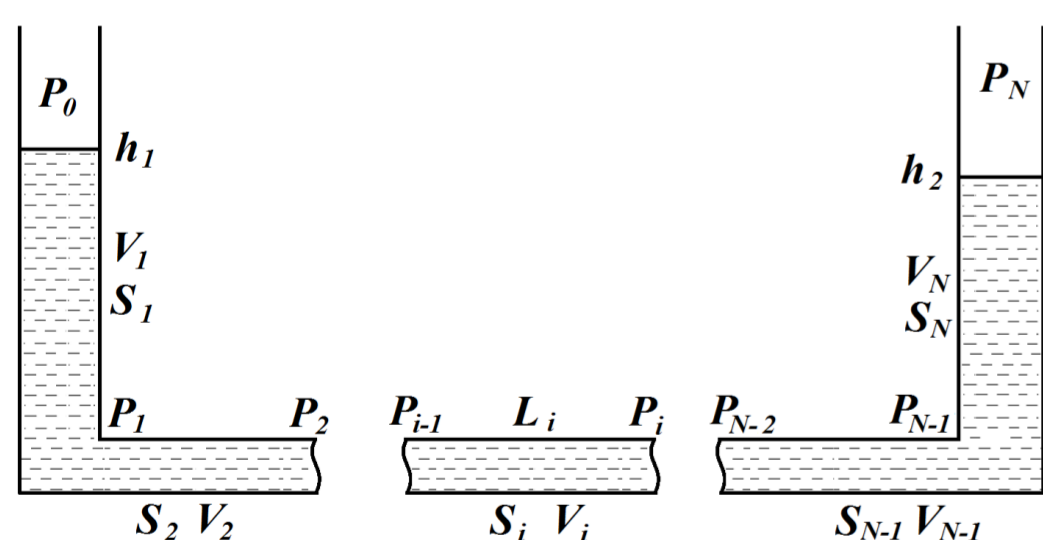


Рис. 1. Гидронивелир

В измерительных сосудах высоты столбов жидкости h_1 и h_2 , скорости жидкости V_1 и V_2 являются переменными, а сечения $S_i(S_N)$ – постоянными. Система уравнений состоит из уравнений баланса сил (давлений) для измерительных сосудов (2) (3) и для соединительного сегмента (4):

$$-h_1 \cdot \rho \cdot \frac{dV_1}{dt} + P_1 - P_0 - h_1 \cdot \rho \cdot g - \frac{8\pi \cdot \mu \cdot h_1 \cdot V_1}{S_1} = 0, \quad (2)$$

$$-h_2 \cdot \rho \cdot \frac{dV_N}{dt} + P_N - P_{N-1} - h_2 \cdot \rho \cdot g - \frac{8\pi \cdot \mu \cdot h_2 \cdot V_N}{S_N} = 0, \quad (3)$$

$$-\frac{4}{3} L_i \cdot \rho \cdot \frac{dV_i}{dt} + P_i - P_{i-1} - \frac{8\pi \cdot \mu \cdot L_i \cdot V_i}{S_i} k = 0, \quad (4)$$

где k – коэффициент трения зависящий от частоты колебаний [4].

Связь скорости и высоты жидкости в измерительном сосуде: $\frac{dh_1}{dt} = V_1$, $\frac{dh_2}{dt} = V_N$ (5)

Уравнение баланса массы для деформируемой и недеформируемой частей нивелира:

$$L_i \cdot \frac{dS_i}{dt} = V_{i-1} S_{i-1} - V_{i+1} S_{i+1}, \quad V_1 S_1 - V_2 S_2 = 0, \quad V_N S_N - V_{N-1} S_{N-1} = 0. \quad (6)$$

Изменение давления приводит к изменению сечения: $S_i = \pi (R_0^{in} + dR_i)^2$

Связь приложенного давления с приращением радиуса определяется на основе решения задачи Лямэ в рамках теории упругости, где α – параметр податливости.

$$dR_i = \alpha \cdot \left(\frac{P_{i-1} + P_i}{2} \right), \quad \alpha = \frac{R_0^{in}}{E} \left(\frac{(R_0^{ext})^2 + (R_0^{in})^2}{(R_0^{ext})^2 - (R_0^{in})^2} + \nu \right) \quad (7)$$

Уравнение (7) можно выразить в виде с учетом вязкого сопротивления материала трубки:

$$\left(\frac{P_{i-1} + P_i}{2} \right) - \beta \frac{dS_i}{dt} = \frac{1}{\alpha} (\sqrt{S_i / \pi} - R_0^{in}) \quad (8)$$

Система уравнений (2)-(8) решается численно с помощью Matlab.

Оценка параметра податливости трубки α

Так как механические свойства материала трубок известны приблизительно, была проведена оценка параметра податливости α в физическом эксперименте. В экспериментах использовалось 2 вида соединительных шлангов из разных сортов ПВХ: «мягкий» (Ш-62) и «средней жесткости», армированный нитью (032МТ). Характеристики трубок при температуре +20°C представлены в таблице 1. На концах нивелира, заполненного водой, создавалась разность давлений $P_1 - P_N$ и регистрировалось отклонение уровня жидкости от равновесного положения на обоих концах. Если бы соединительная трубка была недеформируемой, изменение объема жидкости на обоих концах было бы одинаковым. Разница этих объемов позволяет судить о степени деформирования трубки. Параметр α подбирался таким образом, чтобы изменения уровня жидкости в измерительных сосудах, рассчитанные по уравнениям (2)-(8) соответствовали измеренным значениям. В Табл. 1 приведены значения коэффициента α , рассчитанные по формуле (7) и полученные экспериментально для нивелира длиной 100м.

Таблица 1. Свойства трубки

Вид трубки	E, МПа	ν	R^{in} , мм	R^{Ext} , мм	α_{num} , м/Па	α_{exp} , м/Па
«Мягкая»	3 ± 1	0.4	12	16	$3E-9$	$4.5E-9$
«Средняя»	8 ± 2	0.4	12.5	18.5	$1E-9$	$9.5E-10$

Результаты

Найденные экспериментально значения податливости трубки были использованы при численном моделировании колебаний жидкости в нивелирах с соединительной трубкой разной жесткости. В модели были использованы параметры: плотность жидкости – 998 кг/м³, вязкость – 0.001 Па·с, диаметр измерительных сосудов – 10мм, длина трубки – 100м для «мягкого» и 98.7м для «среднего» нивелира. Полученные численно данные об изменении уровня жидкости h_1 и h_2 в измерительных сосудах для «мягкого» нивелира представлены на Рис. 2а. Аналогичные графики были получены экспериментально (Рис. 2 б) с помощью цифровой камеры. Определение положения уровня жидкости по изображению описано в работе [6].

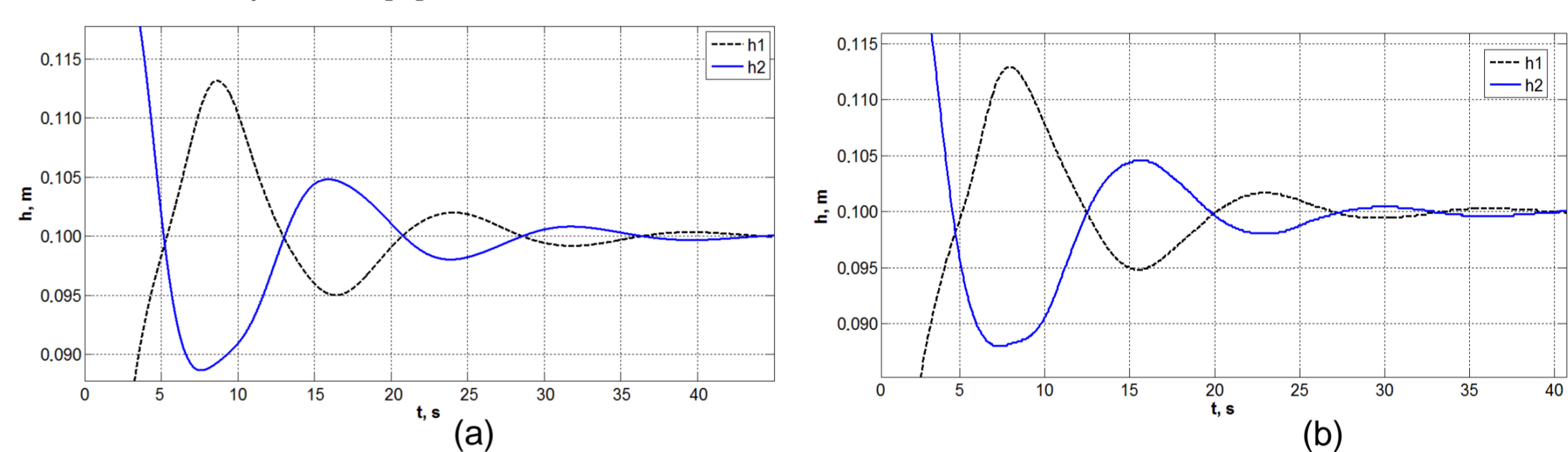


Рис. 2. Изменения уровня жидкости в сосудах: (а) – численно, (б) - эксперимент

Колебания жидкости возбуждались за счет приложения разности давлений $P_1 - P_N$, на одном конце нивелира. Импульс избыточного давления вызывает затухающие колебания уровня жидкости в сосудах с периодом колебаний T . В эксперименте отмечено, что в нивелире с мягкой трубкой уровень жидкости в измерительных сосудах изменялся несимметрично (Рис. 2б). Измеренные значения периода колебаний T_{exp} , приведены в Табл. 2. Они сопоставлены с расчетными значениями, полученными с учетом податливости трубки $T_{num}^{elastic}$ и без него T_{num}^{rigid} . Как видно из таблицы, учет деформируемости трубки приводит к увеличению периода колебаний на величину $\delta = 10\%$ у мягкой трубки и на 2 % у трубки средней жесткости. При этом численный эксперимент показал, что с увеличением длины соединительной трубки эта величина существенно возрастает (Рис. 3). Отличие полученных экспериментальных значений периода колебаний от расчетных значений (~6.8% для мягкой трубки и ~4.6% для средней) можно объяснить учетом в модели инерционных членов в уравнениях движения с коэффициентом 4/3, что соответствует предположению о пуазейлевском характере течения на протяжении всего колебательного процесса. Данные, приведенные на Рис. 3, позволяют оценить границы применимости моделей, не учитывающих податливость трубки при параметрах, указанных выше. Так, для нивелира длиной более 100м с мягкой трубкой пренебрежение способностью трубки к расширению дает ошибку при оценке периода колебаний более 10%. Аналогичным образом можно оценивать влияние податливости трубки на характер колебательного процесса и для других параметров нивелира.

Таблица 2. Период колебаний

Вид трубки	T_{exp} , с	T_{num}^{rigid} , с	$T_{num}^{elastic}$, с	δ_{num} , %
Мягкая 100м	14.60 ± 0.3	14.10	15.60	10%
Средняя 98.7м	13.05 ± 0.3	13.36	13.65	2%

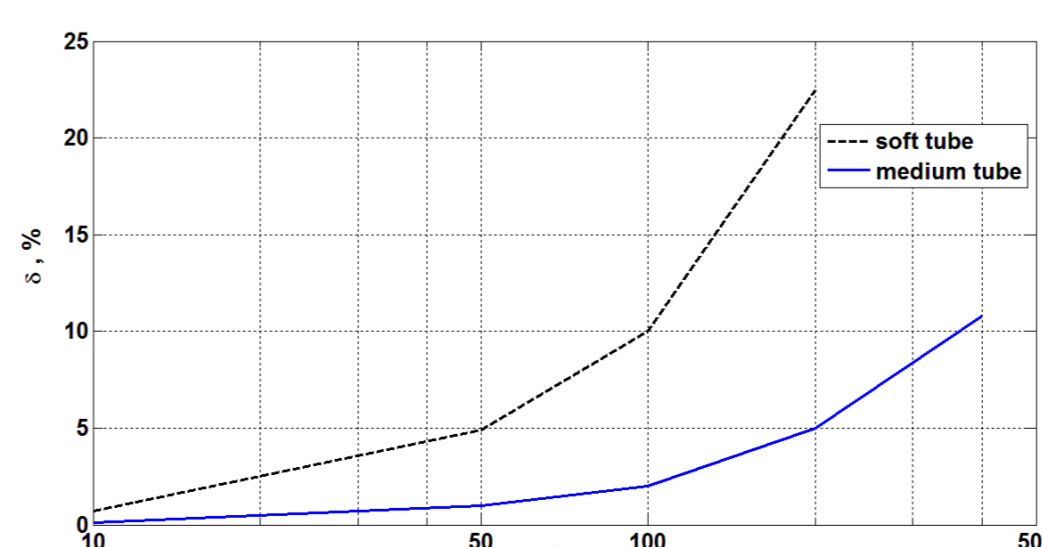


Рис. 3. Доля учета жесткости трубки различной длины в периоде колебаний

Литература

1. F. Boudin et al. Rev. Sci. Instrum. **79**, 034502 (2008).
2. N. d'Oreye and W. Zurn, Rev. Sci. Instrum. **76**, 024501 (2005).
3. A.B. Manukin et al, Seism. Instrum. **50**, 238-243 (2014).
4. R.V. Tsvetkov, V.V. Yepin and A.P. Shestakov, IOP Conf. Ser. Mater. Sci. Eng., **208**, 012046 (2017).
5. D. Shepard, "Dynamic Analysis of a Mercury Tiltmeter", Drapier Laboratories Report No. E-2598, 1971.
6. R.V. Tsvetkov, V.V. Yepin and A.P. Shestakov, Measurement Techniques, **59**, 405-409 (2016).