

Математическая модель напряженно-деформированного состояния роговицы глаза человека на основе метода граничных элементов

Бабайлов Н.А.^{1,a)}, Богачев А.Е.^{2,b)}, Коротких С.А.^{2,c)}, Нефедова О.А.^{1,d)}, Спесак Л.Ф.^{1,e)}

¹ИМАШ УрО РАН, д. 34, ул. Комсомольская, г. Екатеринбург, 620034, Российская Федерация,

²УГМУ, д. 3, ул. Репина, г. Екатеринбург, 620109, Российская Федерация,

e-mail: ^{a)}fupi_vs@el.ru, ^{b)}dr.a.bogachev@yandex.ru, ^{c)}bogach33@yandex.ru,

^{d)}nefedova@imach.uran.ru, ^{e)}lfs@imach.uran.ru

Аннотация. Работа посвящена разработке математических моделей и алгоритмов на их основе, описывающих поведение роговицы глаза человека под действием внутриглазного давления и внешних воздействий. Актуальность представленной работы связана, в частности, с насущными проблемами офтальмологии по лечению дальнозоркости. Наиболее эффективным средством лечения дальнозоркости является лазерная коррекция зрения, состоящая в изменении формы роговицы. Математическая модель позволяет оценить состояние роговицы после проведения операции.

Введение. Задача математического моделирования работы органов человеческого организма является в настоящее время неотъемлемой частью разработки новых методов диагностики, лечения и профилактики большого числа заболеваний. В данной работе предложена математическая модель поведения роговицы глаза человека, которая может быть полезна при хирургическом лечении дальнозоркости. Основой для математического описания поведения роговицы является модель упругого деформирования и методика расчета ее напряженно-деформированного состояния (НДС).

Постановка краевой задачи и алгоритм решения. В основе предлагаемой модели лежит расчет напряженно-деформированного состояния роговицы глаза человека через решение статической краевой задачи теории упругости:

в области Ω , занимаемой роговицей,

$$\sigma_{ij,i} = b_j, \quad (1)$$

$$\varepsilon_{ij} = (u_{j,i} + u_{i,j})/2, \quad (2)$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \frac{2\mu\nu}{1-2\nu}\varepsilon\delta_{ij}, \quad (3)$$

на внутренней поверхности Γ_1 задано внутриглазное давление,

$$f_i = f_i^*, \quad (4)$$

на внешней поверхности Γ_2 действует атмосферное давление,

$$f_i = 0. \quad (5)$$

на поверхности соединения роговицы и склеры Γ_3 задано жесткое закрепление,

$$u_i = 0. \quad (6)$$

Задача (1) – (6) решена в осесимметричной постановке методом граничных элементов. Соответствующие задаче граничное интегральное уравнение и фундаментальное решение были рассмотрены в цилиндрической системе координат. Коэффициенты системы линейных алгебраических уравнений, полученной в результате дискретизации граничного интегрального уравнения, содержат интегралы по граничным элементам от специальных функций – полных эллиптических интегралов первого и второго рода. Эти интегралы вычислены численно с помощью простой квадратурной схемы Гаусса, за исключением интегралов по элементам, содержащим точки сингулярности эллиптических интегралов. При вычислении сингулярных интегралов использован адаптивный алгоритм численного интегрирования, учитывающий известные координаты особых точек.

Программная реализация. Разработанный алгоритм решения был реализован в виде программы, написанной на языке программирования C++ с использованием технологии параллельного программирования OpenMP. Для выполнения численных расчетов использованы библиотеки GSL и BOOST C++. Работа программы была проверена на тестовых задачах, имеющих аналитическое решение.

Заключение. Разработана технология решения статической задачи теории упругости в осесимметричной постановке. Применительно к задачам офтальмологии результаты работы позволяют исследовать напряженно-деформированное состояние роговицы глаза человека при заданных геометрических и механических параметрах.