XVII Международная конференция
МЕХАНИКА, РЕСУРС И ДИАГНОСТИКА
материалов и конструкций

Классы точных решений уравнений Навье-Стокса для описания сдвиговых движений жидкости

Бурмашева Н.В., Просвиряков Е.Ю.

ИМАШ УрО РАН

Система уравнений, описывающая тепловую конвекцию вращающейся вязкой жидкости:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{V} + (\boldsymbol{V},\nabla)\cdot\boldsymbol{V} + \boldsymbol{2\Omega}\times\boldsymbol{V} = -\nabla P + \nu\Delta\boldsymbol{V} + \boldsymbol{F}, & (1) \\ \nabla\cdot\boldsymbol{V} = 0, & (2) \\ \dfrac{\partial}{\partial t}T + (\boldsymbol{V}\cdot\nabla)T = \chi\Delta T. & (3) \end{cases}$$

Согласно гипотезе Буссинеска $\boldsymbol{F} = (0, 0, g\beta T)$.

Система уравнений (1)-(3) способна описывать несколько различных типов движения жидкости:

- изотермическое течение жидкости (при $\mathbf{\Omega} = 0$ и $T = 0$),
- изотермическое течение вращающейся жидкости (при $T = 0$),
- конвективное течение жидкости (при $\mathbf{\Omega} = 0$),
- собственно конвективное течение вращающейся жидкости.

В каждом из указанных случаев система уравнений (1)-(3) оказывается переопределенной для случая сдвиговых течений:

$$\boldsymbol{V}\left(t, x, y, z\right) = \left(V_x, V_y, 0\right).$$

Построим решение переопределенной системы для случая установившихся сдвиговых течений в рамках класса функций, линейных по части координат:

$$V_x = U(z) + u_1(z)x + u_2(z)y$$

$$V_y = V(z) + v_1(z)x + v_2(z)y$$

$$V_z = 0 \qquad (4)$$

$$P = P_0(z) + P_1(z)x + P_2(z)y$$

$$T = T_0(z) + T_1(z)x + T_2(z)y$$

Изотермические установившиеся сдвиговые течения

Условие разрешимости переопределенной системы (1)-(3) в классе (4) имеет вид:

$$u_1^2 + u_2 v_1 = 0. \qquad (5)$$

Изотермические установившиеся сдвиговые течения вращающейся жидкости

Условие разрешимости переопределенной системы (1)-(3) в классе (4) имеет вид:

$$2u_1^2 + 2u_2 v_1 + f_1 \left(u_2 - v_1 \right) = 0. \qquad (6)$$

$$\mathbf{\Omega} = \tfrac{1}{2}(f_3, f_2, f_1)$$

Условие (6) обобщает условие (5).

- Бурмашева Н.В., Просвиряков Е.Ю. Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2020. – Т. 26, № 2. – С. 79-87.
- Бурмашева Н.В., Просвиряков Е.Ю. Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика». – 2020. – Т. 32. – С. 33-48.
- Бурмашева Н.В., Просвиряков Е.Ю. DReaM. – 2020. – Вып. 3. – С. 29-46.

Изотермические установившиеся сдвиговые течения вращающейся жидкости

Решение системы (1)-(3) в классе (4) с учетом условия (6):

$$u_1 = v_2 = 0, \qquad u_2 = -\frac{c}{2} = -v_1. \qquad (7)$$

Параметр c может принимать только 2 значения:

$$c = 0, \qquad c = -2 f_1. \qquad (8)$$

В первом случае получается однородное поле скоростей, во втором – классическое решение Экмана для вращающейся жидкости.

Конвективные установившиеся сдвиговые течения

Условие разрешимости переопределенной системы (1)-(3) в классе (4) имеет вид (5), как и для изотермических течений жидкости без учета вращения.

Решение системы (1)-(3) в классе (4) с учетом условия (5):

$$u_1 = -v_2 = u\cos\vartheta\sin\vartheta, \quad u_2 = u\cos^2\vartheta,$$

$$v_1 = -u\sin^2\vartheta. \tag{9}$$

- Бурмашева Н.В., Просвиряков Е.Ю. Изв. Вузов. Математика. – 2021. - № 7. – С. 12-22.

Конвективные установившиеся сдвиговые течения вращающейся жидкости

Условие разрешимости переопределенной системы (1)-(3) в классе (4) и само решение для пространственных градиентов в случае учета одного параметра Кориолиса совпадает с аналогичными для случая изотермических течений вращающейся жидкости:

$$2u_1^2 + 2u_2 v_1 + f_1\left(u_2 - v_1\right) = 0;$$

$$u_1 = v_2 = 0, \quad u_2 = -\frac{c}{2} = -v_1.$$

$$c = 0,$$
$$c = -2f_1.$$

Значит, в классе (4) скоростей, линейных по части координат, существуют только два совместных решения - однородное поле и решение Экмана.

Бурмашева Н.В., Просвиряков Е.Ю.

nat_burm@mail.ru evgen_pros@mail.ru

Сектор нелинейной вихревой гидродинамики

ИМАШ УрО РАН