**XVII МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ «МЕХАНИКА, РЕСУРС И ДИАГНОСТИКА МАТЕРИАЛОВ И КОНСТРУКЦИЙ», ИМАШ УрО РАН, 18 - 22 декабря 2023 г.**

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ И ДАВЛЕНИЯ ГАЗА ПО ДВУМ ЧАСТОТАМ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИНЫ

**А. Г. Хакимов**

*Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа, Россия*

**e-mail: hakimov@anrb.ru*

Находится спектр частот изгибных колебаний пластины, которая помещена в жидкость или газ. Определяется распределенная поперечная нагрузка на пластину при ее цилиндрическом изгибе. Плотности и давления на поверхности пластины могут быть разными. Решение задачи определяется для сжимаемой и несжимаемой сред. Определяется влияние среднего давления и присоединенной массы газовой среды. По собственным частотам изгибных колебаний пластины, контактирующей с жидкостью или газом, определяются плотность и давление окружающей среды. Обратная задача решается с учетом влияния на изгиб среднего давления, изменения кривизны срединной поверхности и присоединенной массы газовой среды.

В работах [1-17] исследуется спектр частот пластин и оболочек, контактирующих с жидкостью и газом, обзор которых приводится в [18]. В последнем рассматривается влияние давления окружающей среды на низшую частоту колебаний пластины с учетом взаимодействия среднего избыточного давления на ее поверхности и кривизны срединной поверхности, а также действие присоединенной массы газовой среды с удаленными границами.

Здесь методика, приведенная в [18], доработана и применена для определения спектра собственных частот пластинки, контактирующей с жидкостью или газом.

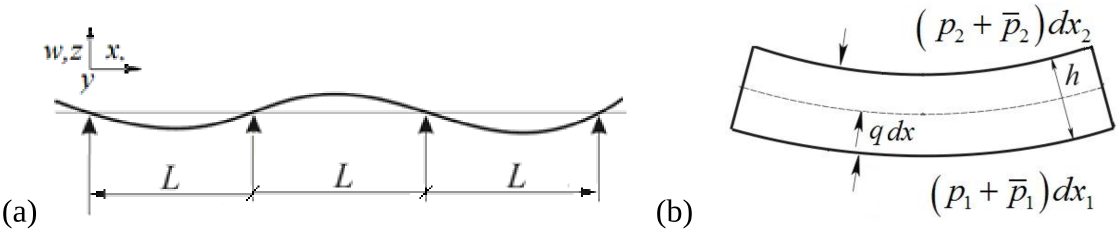


**Рис. 1.** (a) Расчетная схема. (b) Элемент *dx* деформированной пластины.

Уравнение движения тонкой пластины при цилиндрическом изгибе имеет вид [18]

$$D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=q,\;\; D=\frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}. \tag{1}$$

где $E$, $\nu$, $\rho$ – модуль упругости, коэффициент Пуассона, плотность материала, $w(x,t)$ – прогиб, $x$, $t$ – координата, время, $h$ – толщина пластины, $q$ – поперечная распределенная нагрузка. Пластина неограниченной длины по оси $x$ опирается на опоры, допускающие свободный поворот и расположенные на равных расстояниях $L$.

На нижнюю и верхнюю поверхность пластины действуют давления $p_1$ и $p_2$ жидкостей с плотностями $\rho_1$ и $\rho_2$ (рис. 1, а). Здесь $p_1$, $p_2$ – избыточные давления. Предполагается, что $\rho_1$, $\rho_2$ и $p_1$, $p_2$ остаются постоянными при изгибе пластины.

**Несжимаемая среда.** Принято, что опоры не препятствуют свободному перетеканию жидкости вдоль пластины в направлении оси $x$, а области, занятые жидкостями, простираются неограниченно. Давления, вызванные движением пластины, обозначим через $\overline{p}_1$ и $\overline{p}_2$. Используя уравнения движения несжимаемой жидкости относительно потенциала скорости $\varphi(x, z, t)$, условия на поверхностях пластины, также условия на большом удалении от пластины, выражая элементарные длины $dx_1$, $dx_2$ сечений нижней и верхней поверхностей через длину $dx$ срединной линии пластины, где деформации подчиняются гипотезам Кирхгоффа, принимая выражение для прогиба в виде

$$w_n=W_n\sin\beta_n x\sin\omega t,\; \beta_n=\pi n/L,\; n=1,2,...$$

что удовлетворяет условиям $w_n=0$, $\partial^2 w_n/\partial x^2=0$ при $|x|=0, L, 2L, ...$, что позволяет перейти к исследованию спектра частот колебаний пластины в среде.

Следуя методике, представленной в [18], определяются потенциалы скорости над и под пластиной, которые выражаются через амплитуду прогиба $W_n$, акустическое давление на поверхностях пластины представляется в виде

$$\overline{p}_{1n}=-\frac{\rho_1}{\beta_n}\frac{\partial^2 w_n}{\partial t^2},\quad \overline{p}_{2n}=\frac{\rho_2}{\beta_n}\frac{\partial^2 w_n}{\partial t^2}.$$

В результате находим распределенную поперечную нагрузку

$$q=p_1-p_2+\frac{\left(p_1+p_2\right)h}{2}\cdot\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2}-\frac{\rho_1+\rho_2}{\beta_n}\cdot\frac{\partial^2 w_n}{\partial t^2}+\left[-\frac{\rho_1-\rho_2}{\beta_n}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right]\frac{h}{2}\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2}. \tag{2}$$

Член в квадратных скобках в выражении (2) может быть опущен для линейной задачи. При $\rho_1=\rho_2$ этот член обращается в нуль.

Уравнение (1) с учетом (2)

$$D\frac{\partial^4 w_n}{\partial x^4}-\frac{\left(p_1+p_2\right)h}{2}\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2}+\left(\rho h+\frac{\rho_1+\rho_2}{\beta_n}\right)\frac{\partial^2 w_n}{\partial t^2}=p_1-p_2. \tag{3}$$

В частном случае $\rho_1 = \rho_2$, $p_1 = p_2$ и функции прогиба, приведенной выше, из (3) получаем для собственной частоты $\omega_n$

$$\omega_n^2 = \omega_{0n}^2 \frac{1+\alpha_n}{1+\mu_n}, \quad \omega_{0n}^2 = \frac{D\beta_n^4}{\rho h}, \quad \alpha_n = \frac{p_1 h}{D\beta_n^2}, \quad \mu_n = \frac{2\rho_1}{\rho h \beta_1},$$
$$\beta_n = \frac{\pi n}{L}, \quad \omega_n = 2\pi f_n, \quad n = 1, 2, ... \tag{4}$$

Здесь $\omega_{0n}$ – частота пластины в вакууме. Влияние давления и плотности окружающей среды определяется величинами $\alpha_n$ и $\mu_n$. Из (4) следует, что давление повышает, а плотность понижает собственные частоты пластины. При $\alpha_n << 1$, $\mu_n << 1$ влиянием этих параметров можно пренебречь.

При $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0.3$, $\rho = 7.8 \cdot 10^3$кг/м$^3$, $\rho_1 = 10^3$ кг/м$^3$, $p_0 = 0$, $p_1 = 2$ МПа, $L/h = 10$, $n = 1$, $\alpha_1 \approx 10^{-3}$, $\mu_1 = 0.81$. В этом случае нет влияния давления, но есть значительное уменьшение собственной частоты за счет присоединенной массы. При $p_1 = 20$ МПа, $L/h = 100$, то $\alpha_1 \approx 10^{-4} \cdot 10^4 \approx 1$, $\mu_1 = 8.1$. Расчеты по формулам для несжимаемой жидкости, например, в случае воды имеется только снижение собственной частоты, что является известным результатом [1-3]. Учет влияния давления приводит к изменению частоты.

**Обратная задача**. Решение обратной задачи определения плотности и давления несжимаемой среды по двум низшим собственным частотам изгибных колебаний следует из (4) и имеет вид

$$\rho_1 = \frac{\pi\left[12\pi^4 D + \rho h L^4\left(4\omega_1^2 - \omega_2^2\right)\right]}{L^5\left(\omega_2^2 - 8\omega_1^2\right)}, \quad p_1 = \frac{\pi^4 D\left(32\omega_1^2 - \omega_2^2\right) - \rho h L^4 \omega_1^2 \omega_2^2}{\pi^2 L^2 h\left(\omega_2^2 - 8\omega_1^2\right)} \tag{5}$$

При $E = 76 \cdot 10^3$ МПа, $\nu = 037$, $\rho = 10500$ кг/м$^3$, $h = 20$ нм, $L = 2000$ нм, $f_1 = 6.7$ МГц, $f_2 = 26$ МГц решение обратной задачи дает $\rho_1 = 1.680$ кг/м$^3$, $p_1 = 1.292$ МПа.

При $E = 76 \cdot 10^3$ МПа, $\nu = 037$, $\rho = 10500$ кг/м$^3$, $h = 20$ нм, $L = 2000$ нм, $f_1 = 6.8$ МГц, $f_2 = 26$ МГц решение обратной задачи дает $\rho_1 = 1.522$ кг/м$^3$, $p_1 = 1.859$ МПа.

**Сжимаемая среда.** По модели сжимаемой среды имеем [1-3]

$$\frac{\partial^2 \varphi_{1n,2n}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{1n,2n}}{\partial z^2} - \frac{1}{c_{1,2}^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{1n,2n}}{\partial t^2} = 0, \ \ \overline{p}_{1n,2n} = -\rho_{1,2} \frac{\partial \varphi_{1n,2n}}{\partial t}, \ \ c_{1,2}^2 = \kappa_{1,2} \frac{p_{1,2}}{\rho_{1,2}}, \tag{6}$$

где $\kappa_{1,2}$ – коэффициент адиабаты, $c_{1,2}$ – скорость звука. Для сжимаемой жидкости давление и плотность связаны изотермическим законом.

Далее рассматривается частный случай одинаковых сред при одинаковых давлениях ($\rho_1 = \rho_2$, $p_1 = p_2$, $c_1 = c_2$). Для функций прогиба и потенциала скорости

$$w_n = W_n \sin\beta_n x \sin\omega_n t, \quad \varphi_{1n,2n} = \Phi_{1n,2n}(z) \sin\beta_n x \cos\omega_n t$$

из волнового уравнения (5) следует

$$\Phi_{1n,2n} = A_{1n,2n}e^{k_n z} + B_{1n,2n}e^{-k_n z}, \quad k_n^2 = \beta_n^2 - \frac{\omega_n^2}{c_1^2}.$$

Будем рассматривать случай $k_n^2 > 0$. Аналогично [18] определяются динамические давления на поверхности пластины.

Правая часть уравнения (1) равна ($\rho_1 = \rho_2$, $p_1 = p_2$)

$$q = p_1 h\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} + \overline{p}_{1n} - \overline{p}_{2n} = p_1 h\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} + \frac{2\rho_1\omega_n^2}{k}W_n \sin\beta_n x \sin\omega_n t. \tag{7}$$

Подставив в (1) выражение $w_n$ и $q$ из (7), получим

$$D\beta_n^4 - \rho h\omega_n^2 + p_1 h\beta_n^2 - \frac{2\rho_1\omega_n^2}{k_n} = 0,\ \omega_{0n}^2 = \frac{D\beta_n^4}{\rho h},\ k_n^2 = \beta_n^2 - \frac{\omega_n^2}{c_1^2},\ \beta_n = \frac{\pi n}{L}. \tag{8}$$

$$\omega_{0n}^2 = \frac{D\beta_n^4}{\rho h},\ k_n^2 = \beta_n^2 - \frac{\omega_n^2}{c_1^2},\ \beta_n = \frac{\pi n}{L}.$$

Из (8) следует

$$1 - Z_n + \alpha_n - \frac{\mu_n Z_n}{\sqrt{1-\eta_n Z_n}} = 0,\ \alpha_n = \frac{p_1\beta_n^2}{\rho\omega_{0n}^2},\ \mu_n = \frac{2\rho_1}{\rho h\beta_n},\ \eta_n = \frac{\omega_{0n}^2}{c_1^2\beta_n^2},\ Z_n = \frac{\omega_n^2}{\omega_{0n}^2}. \tag{9}$$

Рассмотрим случай $1-\eta_n Z_n > 0$. Частотное уравнение (9) представим в виде кубического

$$Z_n^3 + b_{1n}Z_n^2 + b_{2n}Z_n - b_{3n} = 0$$

$$b_{1n} = -2\delta_n - \frac{1}{\eta_n} + \frac{\mu_n^2}{\eta_n},\ b_{2n} = \delta_n^2 + \frac{2\delta_n}{\eta_n},\ b_{3n} = -\frac{\delta_n^2}{\eta_n}, \delta_n = 1 + \alpha_n$$

Низшая собственная частота колебаний равна $f_1 = \omega_1/2\pi,\ \omega_1 = \omega_{01}\sqrt{Z_1}$. При $E$ = $76\cdot10^3$ МПа, $\nu$ = 037, $\rho$ = 10500 кг/м$^3$, $h$ = 20 нм, $L$ = 2000 нм, $n$ = 1, $\kappa_{1,2}$ = 1.4, атмосферном давлении $p_a$ = 0.1 МПа, плотности воздуха $\rho_{1a}$ = 1.2928 кг/м$^3$, $p_1$ = 2 МПа численное решение уравнения (8) дает корень: $Z_1$ = 1.10268. Соответствующая частота равна $f_1$ = 6.894 МГц. Решение кубического уравнения, естественно, дает такой же корень: $Z_1$ = 1.10268.

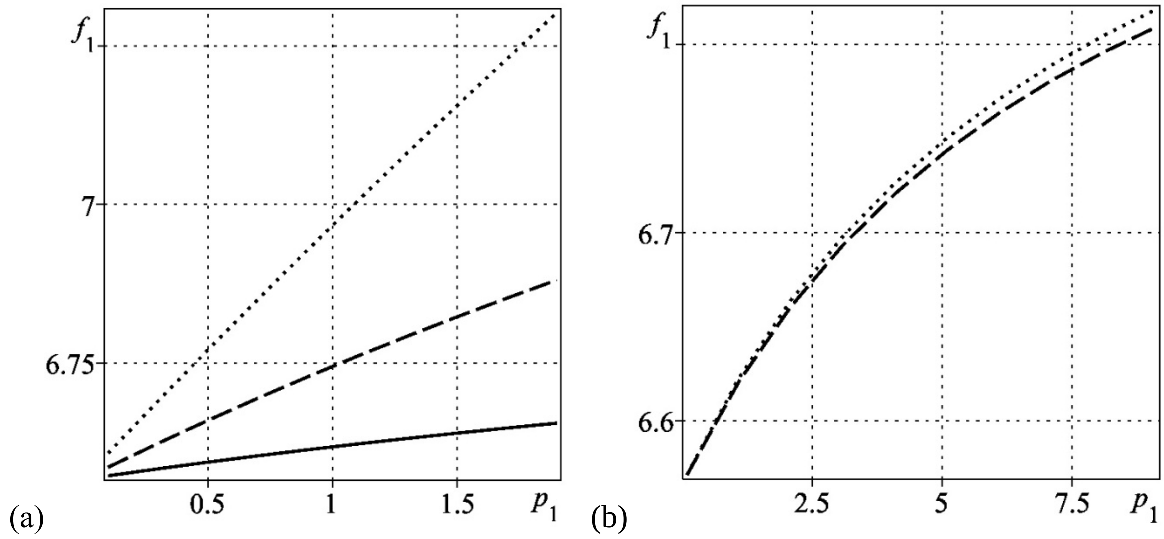


**Рис. 2.** Графики изменения первой частоты изгибных колебаний пластинки $f_1$ (MHz) от давления $p_1$ (MPa): (a) для разных газов: $\rho_1$ = 1.97 (двуокись углерода), 1.29 (воздух), 0.17 (гелий) kg/m$^3$ (сплошная, штриховая, пунктирная линии соответственно); (b) по формулам для несжимаемой (4) и сжимаемой (9) жидкостей для двуокиси углерода $\rho_1$ = 1.97 kg/m$^3$ (пунктирная, штриховая линии соответственно).

На рис. 2, а дается зависимость первой частоты изгибных колебаний пластинки от давления для разных газов. Из рис. 2, а видно, что собственная частота колебаний возрастает с ростом давления. Уменьшение собственной частоты изгибных колебаний происходит с увеличением плотности газа. На рис. 2, b представлены графики изменения первой частоты изгибных колебаний пластинки от давления по формулам для несжимаемой и сжимаемой жидкостей для двуокиси углерода. Получено, что частоты по формулам для несжимаемой жидкости выше, чем частоты по модели для сжимаемой жидкости из-за увеличения плотности. Видно, что разность частот колебаний возрастает с ростом давления.

На рис. 3, а дается зависимость второй частоты изгибных колебаний пластинки от давления для разных газов. Из рис. 3, а видно, что с ростом давления собственная частота колебаний возрастает для гелия, а для воздуха и углекислого газа частота уменьшается. Происходит уменьшение собственной частоты изгибных колебаний с увеличением плотности. На рис. 3, b представлены графики изменения второй частоты изгибных колебаний пластинки от давления по формулам для несжимаемой и сжимаемой жидкостей для двуокиси углерода. Получено, что частоты по формулам для несжимаемой жидкости выше, чем частоты по модели для сжимаемой жидкости из-за увеличения плотности. Видно, что разность частот колебаний возрастает с ростом давления.

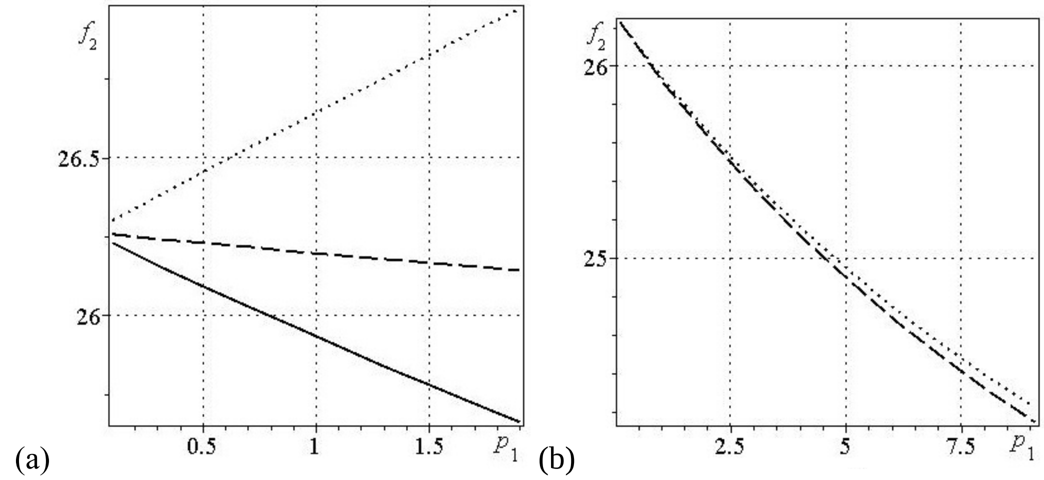


**Рис. 3.** Графики изменения второй частоты изгибных колебаний пластинки $f_2$ (MHz) от давления $p_1$ (MPa): (a) для разных газов: $\rho_1$ = 1.97 (двуокись углерода), 1.29 (воздух), 0.17 (гелий) kg/m$^3$ (сплошная, штриховая, пунктирная линии соответственно); (b) по формулам для несжимаемой (4) и сжимаемой (9) жидкостей для двуокиси углерода $\rho_1$ = 1.97 kg/m$^3$ (пунктирная, штриховая линии соответственно).

**Обратная задача**. Решение обратной задачи определения плотности и давления несжимаемой среды по двум низшим собственным частотам изгибных колебаний следует из (9) и из-за громоздкости здесь не приводится.

**Заключение.** Получены формулы для определения собственных частот изгибных колебаний пластины в газовой среде. Получено, что с ростом давления вторая собственная частота колебаний возрастает для гелия, а для воздуха и углекислого газа частота уменьшается. Происходит уменьшение собственной частоты изгибных колебаний с увеличением плотности газа.

По собственным частотам изгибных колебаний пластины, контактирующей с жидкостью или газом, определяются плотность и давление окружающей среды.

**Финансирование работы.** Работа поддержана средствами государственного бюджета по госзаданию (№0246-2023-0015).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гонткевич В.С.* Собственные колебания оболочек в жидкости. Киев: Наукова думка, 1964. 102 с.
2. *Ильгамов М.А.* Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. М.: Наука, 1969. 180 с.
3. *Попов А. Л., Чернышев Г. Н.* Механика звукоизлучения пластин и оболочек. М.: Физматлит. 1994. 208 с.
4. *Дяченко И.А., Миронов А.А.* Аналитические и численные исследования свободных колебаний цилиндрических оболочек с акустической средой // Проблемы прочности и пластичности. 2021. Т. 83. № 1. С. 35-48. DOI: 10.32326/1814-9146-2021-83-1-35-48
5. *Leizerovich G.S., Taranukha N.A.* Nonobvious features of dynamics of circular cylindrical shells. Mechanics of Solids. 2008. Vol. 43. Iss. 2. P. 246–253. DOI: 10.3103/S0025654408020106.
6. *Rawat A., Matsagar V., Nagpal A.* Finite element analysis of thin circular cylindrical shells. Proceedings of the Indian National Science Academy. 2016. Vol. 82. No 2. P. 349–355. DOI: 10.16943/ptinsa/2016/48426.
7. *Farshidianfar A., Oliazadeh P.* Free vibration analysis of circular cylindrical shells: comparison of different shell theories. International Journal of Mechanics and Applications. 2012. Vol. 2(5). P. 74–80. DOI: 10.5923/j.mechanics.20120205.04.
8. *O'Connell A.D., Hofheinz M., Ansmann M., Bialczak R.C., Lenander M., Lucero E., Neeley M., Sank D., Wang H., Weides M., Wenner J., Martinis J.M., Cleland A.N.* Quantum ground state and single-phonon control of a mechanical resonator // Nature. 2010. No. 464. P. 697-703. DOI: 10.1038/nature08967.
9. *Burg T.P., Godin M., Knudsen S.M., Shen W., Carlson G., Foster J.S., Babcock K., Manalis S.R.* Weighing of biomolecules, single cells and single nanoparticles in fluid // Nature. 2007. No. 446. P. 1066-1069. DOI: 10.1038/nature05741.
10. *Husale S., Persson H.H.J., Sahin O.* DNA nanomechanics allows direct digital detection of complementary DNA and microRNA targets // Nature. 2009. No. 462. P. 1075–1078. DOI: 10.1038/nature08626.
11. *Bleich H. H., Baron M. L.* Free and Forced vibration of an infinitely long cylindrical shell in an infinite acoustic medium // J. Appl.Mech. Transactions of ASME, Vol. 21, No. 2, 1954. P. 167-177.
12. *Sirenko Y. M., Stroscio M. A., Kim K. W.* Elastic vibrations of microtubules in a fluid // Phys. Rev. VOLUME 53, NUMBER 1. 1996. p. 1003-1010.
13. *Ильгамов М.А.* Влияние давления окружающей среды на изгиб тонкой пластины и пленки // ДАН. 2017. Т. 476. № 4. С. 402-405.
14. *Ильгамов М.А.* Влияние поверхностных эффектов на изгиб и колебания нанопленок // ФТТ. 2019. Т. 61. № 10. С. 1825-1830.
15. *Ilgamov M.A., Khakimov A.G.* Influence of Pressure on the Frequency Spectrum of Micro and Nanoresonators on Hinged Supports // Journal of Applied and Computational Mechanics. 2021. Vol. 7. No.2. P. 977–983. DOI: 10.22055/JACM.2021.36470.2848.
16. *Дмитриев С.В., Сунагатова И.Р., Ильгамов М.А., Павлов И.С.* Собственные частоты радиальных колебаний углеродных нанотрубок // ЖТФ. 2021. Т. 91. Вып. 11. С. 1732-1737. DOI:10.21883/JTF.2021.11.51536.127-21
17. *Dmitriev S. V., Semenov A. S., Savin A. V., Ilgamov M. A., Bachurin D. V.* Rotobreather in a carbon nanotube bundle // Journal of Micromechanics and Molecular Physics 2021, 2050010. https://doi.org/10.1142/S2424913020500101
18. *Ильгамов М.А., Хакимов А.Г.* Влияние давления окружающей среды на низшую частоту колебаний пластины // Известия РАН. Механика твердого тела. 2022. №3. С. 88 - 96. https://doi.org/10.31857/S0572329922030084