



Д.А. Паршин

ЗАДАЧА ОБ УПРУГОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ ПОСТЕПЕННО СООРУЖАЕМОЙ ПОЛУСФЕРИЧЕСКОЙ КУПОЛЬНОЙ КОНСТРУКЦИИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВЕСА ЭЛЕМЕНТОВ ДОБАВЛЯЕМОГО К НЕЙ СЛОЯМИ МАТЕРИАЛА*

*Работа выполнена по теме государственного задания (номер госрегистрации 123021700050-1)

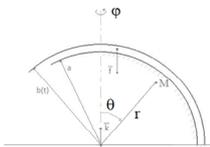
Цели работы:

- Разработка математической модели механики для адекватного описания технологического процесса послойного возведения тяжелого полусферического (в общем случае толстостенного) купола на горизонтальном основании с использованием опалубки.
- Исследование процесса развития упругих технологических напряжений в послойно возводимом куполе под действием на него сил тяжести во время возведения. Анализ эволюции соответствующих распределений контактных напряжений по поверхностям опалубки и основания.

Уравнения равновесия в скоростях напряжений:

$$\frac{\partial s_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (2s_r - s_\theta - s_{\varphi} + s_{r,\varphi} \cdot \text{ctg} \theta) = 0$$

$$\frac{\partial s_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (\text{ctg} \theta \cdot [s_\theta - s_\varphi] + 3s_{r,\varphi}) = 0$$



Уравнения равновесия в скоростях перемещений:

$$\left(2G + \frac{2Gv}{(1-2\nu)r} \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \left(\frac{2Gv}{(1-2\nu)r} + \frac{G}{r} \right) \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \left(\frac{G}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \left(-\frac{2Gv}{(1-2\nu)r} - \frac{3G}{r^2} \right) \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \left(\frac{4Gv}{(1-2\nu)r} + \frac{4G}{r} \right) \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \left(\frac{G \cdot \text{ctg} \theta}{r^2} \right) \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \left(\frac{2Gv \cdot \text{ctg} \theta}{(1-2\nu)r} + \frac{G}{r} \cdot \text{ctg} \theta \right) \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \left(\frac{-4Gv}{(1-2\nu)r^2} + \frac{4G}{r^2} \right) v_r + \left(-\frac{2Gv \cdot \text{ctg} \theta}{(1-2\nu)r^2} - \frac{3G}{r^2} \cdot \text{ctg} \theta \right) v_\theta = 0 \right.$$

$$\left(\frac{2Gv}{(1-2\nu)r^2} + \frac{2G}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \left(\frac{G}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \left(\frac{2Gv}{(1-2\nu)r} + \frac{G}{r} \right) \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \left(\frac{2Gv \cdot \text{ctg} \theta}{(1-2\nu)r^2} + \frac{2G}{r^2} \cdot \text{ctg} \theta \right) \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \left(\frac{2Gv}{(1-2\nu)r} + \frac{2G}{r} \right) \frac{\partial v_r}{\partial r} + \left(\frac{4Gv}{(1-2\nu)r^2} + \frac{4G}{r^2} \right) \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \left(-\frac{2Gv}{(1-2\nu)r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2G}{r^2 \sin^2 \theta} \right) v_\theta = 0 \right.$$

Краевые условия:

- При $r = a$ • При $\theta = \frac{\pi}{2}$ • При $r = b(t)$
- $v_r = 0$ $v_\theta = 0$ $s_r = 0$ (Считаем, что присоединяется изначально не напряженный материал)
- $v_\theta = 0$ $s_\theta = 0$ $s_\varphi = 0$
- $s_r = 0$ $s_\theta = 0$ $\tau_{r\theta} = 0$

Можно показать [Н.Х. Арутюнян; В.В. Метлов; А.В. Манжиров], что выставленные неклассические краевые условия на поверхности роста $r = b(t)$, приводят к следующим условиям для скоростей напряжений:

$$s_r = f_1 \cdot \dot{b}(r, \tau) = -q(t) F(\cos \theta) = q(t) \sum_{n=0,2,4,\dots} W_n P_n(\cos \theta)$$

$$s_{r,\theta} = f_2 \cdot \dot{b}(r, \tau) = -q(t) \frac{dF(\cos \theta)}{d\theta} = q(t) \sum_{n=0,2,4,\dots} W_n \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta}$$

где $t = \tau$, — момент времени, в который данная “частица” присоединилась к растущему телу, $q(t) = f \dot{b}(t)$

Решение поставленной краевой задачи имеет вид:

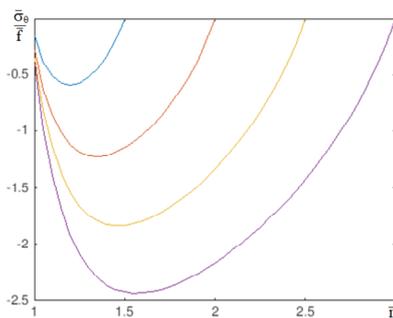
$$s_r = -A_0(t)HG(1+\nu) + D_0(t)2G \left[\frac{2}{r^2} \right] + 2G \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{A_n(t)(n+1)(n^2 - n - 2 - 2\nu)^n + B_n(t)n(n-1)r^{n-2}}{C_n(t) \frac{n}{r^{n+1}}(n^2 + 3n - 2\nu) + D_n(t) \frac{1}{r^{n+1}}(n+1)(n+2)} \right] P_n(\mu)$$

$$s_\theta = -A_0(t)HG(1+\nu) - D_0(t)2G \left[\frac{2}{r^2} \right] + 2G \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{-A_n(t)(n+1)(n^2 + 4n + 2 + 2\nu)^n + B_n(t)n^2 r^{n-2}}{C_n(t) \frac{n}{r^{n+1}}(n^2 - 2n - 1 + 2\nu) - D_n(t) \frac{1}{r^{n+1}}(n+1)^2} \right] P_n(\mu) - 2G \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{A_n(t)(n+5-4\nu)^n + B_n(t)r^{n-2} + C_n(t) \frac{1}{r^{n+1}}(-n+4-4\nu) + D_n(t) \frac{1}{r^{n+1}}}{-A_n(t)HG(1+\nu) - D_0(t)2G \left[\frac{2}{r^2} \right]} \right] \frac{dP_n}{d\theta} \cdot \text{ctg} \theta$$

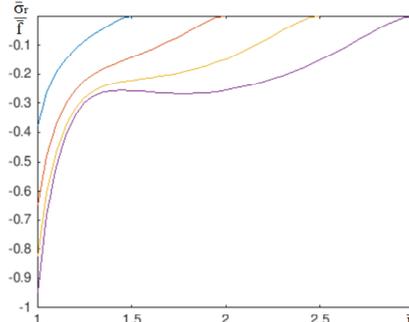
$$s_\varphi = -A_0(t)HG(1+\nu) - D_0(t)2G \left[\frac{2}{r^2} \right] + 2G \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{A_n(t)(n+1)(n-2-2\nu-4\nu\nu)^n + B_n(t)n r^{n-2}}{C_n(t) \frac{n}{r^{n+1}}(n+3-2\nu-4\nu\nu) - D_n(t) \frac{n+1}{r^{n+1}}} \right] P_n(\mu) + 2G \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{A_n(t)(n+5-4\nu)^n + B_n(t)r^{n-2} + C_n(t) \frac{1}{r^{n+1}}(-n+4-4\nu) + D_n(t) \frac{1}{r^{n+1}}}{-A_n(t)HG(1+\nu) - D_0(t)2G \left[\frac{2}{r^2} \right]} \right] \frac{dP_n}{d\theta} \cdot \text{ctg} \theta$$

$$s_{r,\theta} = 2G \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{A_n(t)(n^2 + 2n - 1 + 2\nu)^n + B_n(t)(n-1)r^{n-2}}{C_n(t) \frac{n}{r^{n+1}}(n^2 - 2 + 2\nu) - D_n(t) \frac{1}{r^{n+1}}(n+2)} \right] \frac{dP_n}{d\theta}$$

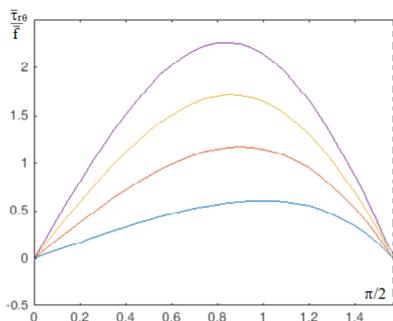
Эволюция зависимости меридиональных напряжений (контактного давления с обратным знаком) от радиуса на подошве купола



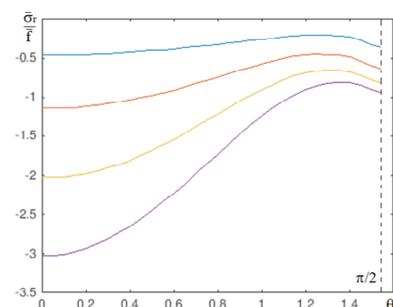
Эволюция зависимости радиальных напряжений от радиуса в точках подошвы купола



Эволюция зависимости касательных (контактных) напряжений от угла на поверхности опалубки



Эволюция зависимости радиальных напряжений (контактного давления с обратным знаком) от угла на поверхности опалубки



Восстановление напряжений по их найденным скоростям путем интегрирования по времени с нулевыми начальными условиями (в момент присоединения материал не напряжен):

$$\int_{\tau_0}^{\tau} s_r d\tau = f \cdot \int_{\tau_0}^{\tau} \left[-\tilde{A}_0(b(t))4G(1+\nu) + \tilde{D}_0(b(t))2G \left[\frac{2}{r^2} \right] + 2G \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{-\tilde{A}_n(b(t))(n+1)(n^2 - n - 2 - 2\nu)^n + \tilde{B}_n(b(t))n(n-1)r^{n-2}}{-\tilde{C}_n(b(t)) \frac{n}{r^{n+1}}(n^2 + 3n - 2\nu) + \tilde{D}_n(b(t)) \frac{1}{r^{n+1}}(n+1)(n+2)} \right] P_n(\mu) \right] db(\tau) = s_r(r, \theta, t)$$

$$\int_{\tau_0}^{\tau} s_\theta d\tau = f \cdot \int_{\tau_0}^{\tau} \left[-\tilde{A}_0(b(t))4G(1+\nu) - \tilde{D}_0(b(t))G \left[\frac{2}{r^2} \right] + 2G \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{-\tilde{A}_n(b(t))(n+1)(n^2 + 4n + 2 + 2\nu)^n - \tilde{B}_n(b(t))n^2 r^{n-2}}{\tilde{C}_n(b(t)) \frac{n}{r^{n+1}}(n^2 - 2n - 1 + 2\nu) - \tilde{D}_n(b(t)) \frac{1}{r^{n+1}}(n+1)^2} \right] P_n(\mu) - 2G \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\tilde{A}_n(b(t))(n+5-4\nu)^n + \tilde{B}_n(b(t))r^{n-2} + \tilde{C}_n(b(t)) \frac{1}{r^{n+1}}(-n+4-4\nu) + \tilde{D}_n(b(t)) \frac{1}{r^{n+1}}}{-\tilde{A}_n(b(t))HG(1+\nu) - \tilde{D}_0(b(t))2G \left[\frac{2}{r^2} \right]} \right] \frac{dP_n}{d\theta} \cdot \text{ctg} \theta \right] db(\tau) = s_\theta(r, \theta, t)$$

$$\int_{\tau_0}^{\tau} s_\varphi d\tau = f \cdot \int_{\tau_0}^{\tau} \left[-\tilde{A}_0(b(t))4G(1+\nu) - \tilde{D}_0(b(t))G \left[\frac{2}{r^2} \right] + 2G \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{-\tilde{A}_n(b(t))(n+1)(n-2-2\nu-4\nu\nu)^n + \tilde{B}_n(b(t))n r^{n-2}}{\tilde{C}_n(b(t)) \frac{n}{r^{n+1}}(n+3-2\nu-4\nu\nu) - \tilde{D}_n(b(t)) \frac{n+1}{r^{n+1}}} \right] P_n(\mu) + 2G \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\tilde{A}_n(b(t))(n+5-4\nu)^n + \tilde{B}_n(b(t))r^{n-2} + \tilde{C}_n(b(t)) \frac{1}{r^{n+1}}(-n+4-4\nu) + \tilde{D}_n(b(t)) \frac{1}{r^{n+1}}}{-\tilde{A}_n(b(t))HG(1+\nu) - \tilde{D}_0(b(t))2G \left[\frac{2}{r^2} \right]} \right] \frac{dP_n}{d\theta} \cdot \text{ctg} \theta \right] db(\tau) = s_\varphi(r, \theta, t)$$

$$\int_{\tau_0}^{\tau} s_{r,\theta} d\tau = f \cdot \int_{\tau_0}^{\tau} \left[2G \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\tilde{A}_n(b(t))(n^2 + 2n - 1 + 2\nu)^n + \tilde{B}_n(b(t))(n-1)r^{n-2}}{\tilde{C}_n(b(t)) \frac{n}{r^{n+1}}(n^2 - 2 + 2\nu) - \tilde{D}_n(b(t)) \frac{1}{r^{n+1}}(n+2)} \right] \frac{dP_n}{d\theta} \right] db(\tau) = s_{r,\theta}(r, \theta, t)$$

Проверка точности расчетов:

При $b = 1.5$ сила полной реакции опоры равна:

$$\frac{\bar{R}_{\text{опора}}}{f} = \frac{2\pi}{3} [\bar{b}_1^3(t) - 1] \approx 4.9742$$

С другой стороны:

$$\frac{\bar{R}_{\text{конструкция}}}{f} = -2\pi \int_0^{\pi/2} \frac{s_r(\bar{r}, \frac{\pi}{2}, t)}{f} \bar{r} d\bar{r}$$

$$\frac{\bar{R}_{\text{конструкция}}}{f} = -2\pi \int_0^{\pi/2} \frac{s_r(\bar{r}, \theta, t) \sin 2\theta d\theta + 2\pi \int_0^{\pi/2} \frac{dP_n}{d\theta}(\bar{r}, \theta, t) \sin^2 \theta d\theta}{f}$$

$$\frac{\bar{R}_{\text{конструкция}}}{f} = \frac{\bar{R}_{\text{конструкция}}}{f} + \frac{\bar{R}_{\text{основание}}}{f} \approx 4.9725$$

Выводы:

- В рамках современных подходов механики аддитивных процессов построена математическая модель процесса квазистатического развития НДС послойно возводимой строительной конструкции в форме полусферического купола под действием силы тяжести.
- Поставлена соответствующая неклассическая задача теории упругости. Построено ее точное аналитическое решение в рядах и квадратурах. Выполнены многочисленные числовые расчеты.
- Проанализирована эволюция технологических напряжений в возводимой купольной конструкции и соответствующих распределений контактных напряжений, действующих на основание и технологическую оснастку.