

ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ ТЕХНОЛОГИЯ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ПОСТАНОВКЕ

Нефедова О.А.^{а)}, Спевак Л.Ф.^{б)}

ИМАШ УрО РАН, д. 34, ул. Комсомольская, г. Екатеринбург, 620034, Российская Федерация
e-mail: ^{а)}nefedova@imach.uran.ru, ^{б)}lfs@imach.uran.ru

Аннотация Работа посвящена разработке параллельного алгоритма и программы для решения нестационарных задач теплопроводности и диффузии в осесимметричных областях при осесимметричных граничных условиях. В основе численного решения лежит метод граничных элементов. Для повышения эффективности компьютерной реализации алгоритма было выполнено распараллеливание вычислений и привлечена библиотека OpenMP. Разработанная программа была протестирована сравнением результатов расчетов с данными известных точных решений.

Введение Работа посвящена разработке параллельной методики и программы для решения задач теплопроводности в осесимметричной постановке в составе создаваемого авторами программного комплекса. Комплекс предназначен для решения краевых задач для уравнений эллиптического и параболического типа в исследовательских и прикладных целях. Метод граничных элементов (МГЭ) является эффективным инструментом для анализа рассматриваемых задач, а также имеет хороший потенциал распараллеливания вычислений. В работе рассмотрен алгоритм, основанный на использовании зависящего от времени трехмерного фундаментального решения и шаговой по времени схемы численного решения задачи с помощью МГЭ.

Постановка краевой задачи и алгоритм решения Рассмотрим нестационарную задачу теплопроводности в случае осевой симметрии в цилиндрической системе координат (r, φ, z) :

$$\frac{\partial^2 u(\mathbf{x}, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial r} + \frac{\partial^2 u(\mathbf{x}, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{k} \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = 0, \quad \mathbf{x}(r, z) \in \bar{\Omega}; \quad (1)$$

$$u(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x} \in \bar{\Gamma}_1} = u^*(\mathbf{x}, t); \quad q(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x} \in \bar{\Gamma}_2} = q^*(\mathbf{x}, t), \quad \bar{\Gamma} = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2, \quad (2)$$

также известно начальное распределение температуры

$$u(\mathbf{x}, t) = u_0(\mathbf{x}, t_0), \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}. \quad (3)$$

Задача (1) – (3) решена с помощью МГЭ. Соответствующие задаче граничное интегральное уравнение и фундаментальное решение были рассмотрены в цилиндрической системе координат. Алгоритм хорошо распараллеливается на всех этапах решения задачи.

Программная реализация Программа, реализующая представленный алгоритм, была написана на языке программирования C++ с использованием стандарта OpenMP. Для выполнения численных расчетов использованы библиотеки GSL и BOOST C++. Работа программы была протестирована сравнением результатов расчетов с известными точными решениями.

Заключение Разработан программный модуль для решения нестационарных задач теплопроводности в осесимметричной постановке. В ходе работы была использована методика распараллеливания алгоритма на основе МГЭ для открытого стандарта OpenMP. Расчеты подтверждают корректность численных решений и возможность полного масштабирования при различных количествах граничных элементов в соответствии с количеством доступных ядер/процессоров.

Пример Задача теплопроводности для сплошного кругового цилиндра длиной $2l$ и диаметром $2a$, начальная температура которого равна u_0 . В начальный момент времени он помещался в среду с постоянной температурой u^* . Т.е. заданы начальные и граничные условия в цилиндрической системе координат: $u_0(r, z, t_0) = u_0$; $u(r, z, t)|_{r=a} = u^*$; $u(r, z, t)|_{z=\pm l} = u^*$. Требуется найти распределение температуры внутри цилиндра в различные моменты времени. Точное решение задачи известно и имеет следующий вид:

$$u(x, t) = u^* - (u_0 - u^*) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_n A_m I_0 \left(\mu_n \frac{r}{a} \right) \cos \mu_m \frac{z}{l} \cdot \exp \left(-(\mu_n^2 + \mu_m^2 K_l^2) \mathbf{F}_0 \right) \right), \quad (4)$$

где $A_n = 2/(\mu_n I_1(\mu_n))$; $A_m = (-1)^{m+1} 2/\mu_m$; μ_n – корни функции Бесселя первого рода нулевого порядка; $\mu_m = (2m - 1)\pi/2$; I_0 – модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка; I_1 – модифицированная функция Бесселя первого рода первого порядка; $K_l = a/l$; $\mathbf{F}_0 = kt/a^2$.

На рисунке приведено сравнение точного решения и решения МГЭ с шагом по времени $h = 10$ с в различные моменты времени: $t_* = 40$ с, $t_* = 80$ с, $t_* = 120$ с. Значения температуры вдоль радиуса цилиндра, полученные с помощью МГЭ, оказались близки к точному решению (4), что говорит об эффективности предложенной технологии решения.

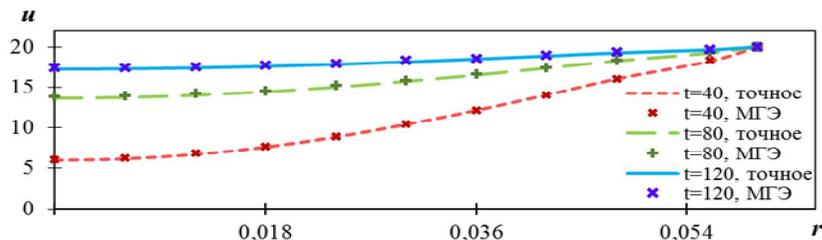


Рис. Сравнение решения МГЭ и точного решения вдоль радиуса цилиндра